



Laboratoire de mathématiques
UMR 5127 - CNRS et Université de Savoie
www.lama.univ-savoie.fr

Projet scientifique du LAMA 2011-2014



PROJET
du Laboratoire de
Mathématiques
de l'Université de Savoie
(LAMA)

Table des matières

1	Projet global du laboratoire	4
1.1	Introduction	4
1.2	La science au sein du laboratoire	4
1.2.1	Attractivité du laboratoire et problèmes inhérents	4
1.2.2	Animation du laboratoire	5
1.2.3	Projets scientifiques	5
1.3	Organisation et vie du laboratoire	7
1.3.1	L'articulation recherche-enseignement	7
1.3.2	Pôle secrétariat et gestion de contrats	8
1.3.3	Problème de locaux, parc informatique, bibliothèque	8
1.4	Conclusion	9
2	Projet de l'équipe EDPs²	10
2.1	Introduction	10
2.2	Projets en cours	11
2.3	Des projets de structuration en cours	12
2.4	Faiblesse et force de notre équipe	13
3	Projet de l'équipe Géométrie	15
3.1	Introduction	15
3.2	Projets en cours	15
3.3	Projets de structuration	17
3.4	Faiblesse et force de notre équipe	17
4	Projet de l'équipe LIMD	18
4.1	Introduction	18
4.2	Projets en cours	19
4.3	Formation, diffusion, culture scientifique	24

Chapitre 1

Projet global du laboratoire

PORTEUR DU PROJET : D. BRESCH

1.1 Introduction

Nous ne reviendrons pas en détail sur tous les points déjà mentionnés dans la partie bilan et projet des membres du laboratoire. Nous rappellerons seulement les axes principaux envisagés par le porteur du projet pour le prochain quadriennal ; ces axes sont soutenus par l'ensemble des membres du LAMA.

Le laboratoire de Mathématiques est un laboratoire de petite taille avec une activité extrêmement soutenue de publications dans des revues et conférences d'audience internationale. Les résultats mathématiques originaux sont nombreux et reconnus : plusieurs prix et distinctions en attestent. Notre unité est également très active au sein de réseaux nationaux et internationaux. Une attention particulière est également portée pour une formation doctorale internationale de qualité. Notre petite taille n'est pas un handicap puisqu'elle permet une cohérence de la politique scientifique interne aux équipes et des interactions inter-équipes favorisées. Nous allons, dans une première section, donner quelques éléments concernant la science au sein du laboratoire. En ce qui concerne les projets scientifiques, nous séparerons le texte en deux parties : la première sera consacrée aux projets de chaque équipe et une deuxième partie concernera les actions fédératives. Nous renvoyons le lecteur aux projets des trois équipes (voir chapitres suivants) pour le détail des travaux de recherche au sein de chaque spécialité. Nous décrirons ensuite, en section 3, l'organisation et la vie du laboratoire. Nous mentionnerons les points à améliorer lors du prochain quadriennal. Il s'agira principalement de moderniser les modes de fonctionnement afin d'être en accord avec la nouvelle configuration du laboratoire. Nous concluerons dans une dernière section.

1.2 La science au sein du laboratoire

1.2.1 Attractivité du laboratoire et problèmes inhérents

Points forts. Le LAMA a attiré 4 chercheurs CNRS lors du dernier quadriennal ainsi que des enseignants-chercheurs de premier plan et une ingénieure de recherche. Ceci permet de mesurer l'attractivité et le dynamisme de l'unité. Le laboratoire de Mathématiques est maintenant constitué des trois équipes suivantes : l'équipe EDPs² (Équations aux Dérivées Partielles : Études Déterministes et Probabilistes), l'équipe Géométrie, l'équipe LIMD (Logique, Informatique et Mathématiques Discrètes). Au cours du dernier quadriennal, notre Unité Mixte de Recherche du CNRS (rattachée actuellement à l'INSMI à 100%) est devenue un savant mélange des sections 25, 26 et 27 du CNU et des sections 01 et 07 du CNRS. L'arrivée de chercheurs CNRS section 07 ainsi que d'enseignants-chercheurs section 27 du CNU est un plus pour notre laboratoire : il suffit de regarder

le bilan du quadriennal pour s'en convaincre. Cette politique est d'ailleurs soutenue par le CNRS dans le cadre de l'interaction Mathématiques-Informatique ou l'interaction EDPs-Géométrie. Il nous faut donc préserver cette complémentarité en des proportions relativement équilibrées. L'arrivée récente d'un enseignant-chercheur en probabilités est également un plus pour notre laboratoire en vue d'interactions dépassant le cadre EDP-Proba. Tout en appuyant les thèmes de prédilection de chaque équipe, il faut également continuer à favoriser les interactions entre équipes qui sont de plus en plus nombreuses et facilitées par la taille de notre centre. Les membres du LAMA ont réussi à financer la venue de nombreux chercheurs étrangers et post-doctorants sur leurs fonds propres. Il nous faut essayer d'accroître ces possibilités.

Points faibles. Avoir un laboratoire de recherche dynamique n'est pas sans conséquence : manque de place, manque de support secrétariat, manque de transparence sont les premiers écueils (voir partie organisation et vie du laboratoire).

Politique scientifique dans le cadre du projet.

— En octobre 2010, l'équipe EDPs2 devrait être composée de 10 enseignants-chercheurs, 2 chercheurs CNRS et 1 IR Uds. L'équipe géométrie devrait être composée de 7 enseignants-chercheurs et l'équipe LIMD devrait être composée de 8 enseignants-chercheurs et 2 chercheurs CNRS. Conformément à ce qui a été écrit dans la partie bilan du présent quadriennal, il est important de donner la priorité à l'obtention d'un poste de MdC pour l'équipe géométrie, en appui du nouveau professeur qui sera recruté en septembre 2010. Les chercheurs CNRS actuellement présents étant dans les équipes : EDPs2 et LIMD, il est également important d'œuvrer pour favoriser la venue d'un chercheur CNRS (CR ou DR) pour l'équipe géométrie.

– Le porteur du projet veillera à ce que toutes les composantes du laboratoire puissent mener à bien leurs projets de recherche avec comme objectif minimal de conserver leur potentiel humain et comme objectif escompté d'accroître le potentiel humain, tout en respectant les proportions entre équipes, pour permettre de mener à bien la politique scientifique ambitieuse que chaque équipe s'est donnée.

– Des demandes universitaires et CNRS en moyens humains seront faites dans le cadre des interactions entre disciplines comme l'interaction Mathématiques-Informatique.

1.2.2 Animation du laboratoire

Chaque équipe du laboratoire anime un séminaire. La liste des invités 2006-2009, disponible sur notre site internet, montre un fonctionnement soutenu avec des invités de grandes qualités scientifiques. Il existe également un séminaire de laboratoire qui, dans sa nouvelle mouture, se donne comme objectif de favoriser un meilleur transfert de connaissances entre équipes. Le porteur du projet favorisera également l'animation de groupes de travail inter-équipes et la mise en place d'un séminaire des doctorants.

1.2.3 Projets scientifiques

Nous renvoyons le lecteur aux fiches projets des équipes pour prendre connaissance du détail des axes de recherche envisagés par nos trois composantes. Nous déclinons ce paragraphe en deux parties : une partie consacrée aux travaux de recherche liés aux équipes et une deuxième partie concernant les axes fédérateurs, sur lesquels le laboratoire travaillera dans le cadre du prochain quadriennal.

Les axes de recherche des équipes

– *Équipe EDPs2.* L'équipe EDPs2 s'est constituée récemment avec l'idée d'adopter une approche mêlant aspects déterministes et stochastiques, théorie et calcul scientifique pour une meilleure

compréhension des systèmes complexes qui nous entourent (environnement, biologie-médecine, industrie, etc . . .). Les membres de l'équipe proposent de travailler principalement autour des trois axes liés aux ANRs de l'équipe : GAOS, MathOcean et MANIPHIC (voir le descriptif dans la partie projet équipe). Cette équipe souhaite également continuer à développer les thématiques sur lesquelles elle est internationalement reconnue :

- Problèmes de frontière libre,
 - Analyse spectrale et EDPs singulières,
 - Problèmes inverses et rétrogrades : aspects géométriques et probabilistes,
 - Analyse non linéaire.
- *Équipe géométrie.* L'équipe Géométrie souhaite continuer à développer les thématiques dans lesquelles elle excelle. Les projets sont multiples et concernent :
- La géométrie analytique et algébrique réelle, en particulier les propriétés métriques des semi-algébriques et des sous-analytiques et la topologie des ensembles algébriques,
 - La dynamique du gradient riemannien et sous-riemannien, applications en topologie de variétés lisses et en optimisation ; l'étude du talweg d'une fonction analytique sur une variété compacte en liaison avec l'homologie de Morse,
 - La désingularisation de familles analytiques de matrices et de champs de vecteurs (théorie des perturbations analytiques des opérateurs,
 - L'étude de variétés algébriques réelles en dimension 2 et 3,
 - L'étude de la topologie des variétés tropicales et des variétés réelles creuses,
 - L'étude des problèmes de singularités en géométrie différentielle, géométrie en dimension infinie, géométrie sous-riemannienne, théorie du contrôle et en physique mathématique ; sur cette partie nous travaillons à des applications en théorie de la viabilité et inclusions différentielles, ainsi qu'à l'étude de la distance sous-riemannienne,
 - La géométrie finslerienne : plus particulièrement ses liens avec la géométrie de Hilbert, volume et entropie.
- *Équipe LIMD.* Initialement ancrée en logique et théorie de la démonstration, l'équipe LIMD poursuit son ouverture vers *l'informatique mathématique* : LIMD développe des objets et méthodes mathématiques pour répondre à des problématiques issues des grandes questions informatiques. Au sein du LAMA, l'équipe joue également un rôle d'interface entre mathématiques et informatique. Ceci se traduit par diverses collaborations traversant les frontières des équipes. L'équipe se décline en deux pôles, que l'on peut désigner pour simplifier par *logique de la programmation* et *mathématiques discrètes*, qui recouvrent respectivement les domaines de recherche suivants :
1. Théorie de la démonstration, λ -calcul, fondements et implantation des langages de programmation, application à la linguistique,
 2. Géométrie discrète, combinatoire des mots, pavages et systèmes dynamiques discrets, structures discrètes.

Dans le premier pôle, un projet phare est le développement de PML, qui est à la fois un langage de programmation fonctionnel et un outil d'aide à la démonstration, doté d'un langage commun de programmation, de typage et de preuve. Au sein du second pôle, l'accent est mis sur les interactions : avec les autres équipes d'abord, par l'application de techniques de géométrie discrète en géométrie et en modélisation ; mais également au sein de la fédération de laboratoires, avec des approches combinatoires en biologie et en particulier pour l'étude du génome.

Les axes fédérateurs

- *Interaction entre équipes.* Les sujets d'interaction possibles ou effectifs entre équipes ne manquent pas au sein du LAMA : les problèmes de valeurs propres (équipe EDPs2/ équipe Géométrie) , l'optimisation de formes et géométrie discrète (équipe EDPs2/équipe LIMD), la polygonalisation des surfaces implicites singulières (équipe Géométrie/ équipe LIMD), les EDOs singulières (équipe EDP2/ équipe Géométrie) en sont des exemples. Le porteur du projet appuiera les initiatives en cours et celles à venir. Le projet d'équipe INRIA porté par É. OUDET, à l'interface des mathématiques appliquées et de l'informatique, est un exemple de cette richesse inter-équipes qu'il faut absolument encourager.

– *Liens existants ou à renforcer dans la configuration Rhône-Alpes.* La configuration géographique rhône-alpine est comparable à une répartition de centres universitaires parisiens. L’université de Grenoble est à 40 minutes en voiture et l’université Claude Bernard et l’ENS Lyon à 1h. Il est important de favoriser et d’amplifier les collaborations avec nos collègues des universités voisines. Donnons à titre d’exemple quelques collaborations qui existent déjà :

- GT rhône-alpin de Géométrie discrète avec le LIRIS (Lyon) et le Gipsa-lab (Grenoble),
- ANR GeoDIB : un de nos partenaires est le LIRIS (Lyon),
- ANR Choco : un de nos partenaires est l’équipe Plume du LIP (ENS Lyon),
- Séminaire commun LIMD - équipe Plume (Lyon),
- Journées JERAA avec Clermont-Ferrand, Grenoble, Lyon, Saint-Etienne,
- ANR MANIPHYC : un de nos partenaires est l’Institut Camille Jordan (Lyon),
- Projet MIGAL : un de nos partenaires est le LJK (Grenoble),
- Travaux en biomathématiques avec l’équipe INRIA Numed (Lyon),
- Travaux en géométrie avec l’Institut Camille Jordan (Lyon).

Il faut également noter la proximité de la Suisse et de l’Italie où un effort devra être fait en direction par exemple de Lausanne, Genève et Turin même si quelques relations existent déjà :

- Projet européen Types : un des partenaires est l’université de Turin (<http://www.cs.chalmers.se/Cs/Research/Logic/Types/>),
- collaboration en cours en géométrie avec G. Mikhalkin (Genève, Suisse)

Notons que le LAMA fait partie de plusieurs structures fédératives notamment la fédération VOR (Vulnérabilité des Ouvrages aux Risques) avec comme représentant D. DUTYKH.

– *Place et devenir de la fédération de laboratoires (instituts des sciences fondamentales de l’université de savoie).* Il existe au sein de l’université de Savoie, une fédération de recherche (LAMA-LAPTH-LAPP) toute jeune (2 ans) qui a été portée par Paul SORBA, Directeur de Recherche CNRS au LAPTH et qui est actuellement portée par Patrick AURENCHÉ, Directeur de Recherche au LAPTH. Une réflexion est en cours sur la création d’un Institut des Sciences Fondamentales de l’Université de Savoie composé des trois UMRs LAMA, LAPTH, LAPP chacune sous leur tutelle respective : INSMI, INP, IN2P3. Outre le fait de pouvoir afficher un pôle des sciences fondamentales à l’Université de Savoie, cette structure devrait permettre de favoriser l’émergence d’interactions nouvelles (Phys-Maths-Info) tout en conservant les spécificités des trois composantes. Notons qu’une interaction en génomique a déjà vu le jour et plusieurs événements (TAG) ont été co-organisés par le LAMA et le LAPTH.

– *Projets spécifiques avec d’autres EPST/EPIC.* Quelques projets sont en cours de discussion par des membres du LAMA : un projet de création d’une équipe INRIA porté par É. OUDET, un projet en lien avec la DGA par D. BRESCH et D. DUTYKH. Un projet de collaboration avec le LOCIE (Laboratoire d’Optimisation de la Conception et Ingénierie de l’Environnement) et l’INES (Institut de l’Énergie Solaire) est également en gestation. Il est important de soutenir ces initiatives qui sont dynamisantes pour notre unité.

1.3 Organisation et vie du laboratoire

1.3.1 L’articulation recherche-enseignement

Une petite structure entraîne un manque de roulement sur les lourdes charges administratives et d’enseignement. Au sein du LAMA, nous trouvons par exemple le directeur d’UFR (P. BARAS), le directeur du département de Mathématiques (C. LÉCOT), le directeur du département d’Informatique (J.-O. LACHAUD), le directeur adjoint d’UFR (P. ORRO). Bon nombre d’enseignants-chercheurs croulent également sous les responsabilités répétées de filières d’enseignement. On voit l’importance de mettre en place une structure interne permettant de gérer recherche et enseignement en même temps. Conformément aux statuts du CNRS, les décisions seront prises par un conseil de laboratoire constitué par la totalité des membres du laboratoire, sachant que nous sommes une unité de moins de 30 enseignants-chercheurs et chercheurs permanents. Il est toutefois important de mettre en place un conseil restreint qui aura pour but de préparer les dossiers à approuver en conseil de laboratoire. Ce conseil restreint s’articulera autour d’un conseil lié à la

recherche (présidé par le directeur du laboratoire) et d'un conseil lié aux enseignements et charges administratives (présidé par le directeur du département de mathématiques et avec la participation d'un enseignant-chercheur du LAMA appartenant à la section 27 du CNU). Chaque conseil (recherche et enseignement) sera composé de huit membres permanents. Tous les représentants du LAMA au CS, CA, UFR seront invités à siéger au sein du conseil restreint. En sus, l'ingénieure de recherche, la secrétaire du laboratoire et un représentant des doctorants participeront au conseil recherche. Cette articulation en conseil recherche et conseil enseignement devrait par la suite permettre de valoriser les prises de responsabilités par des aménagements pour la recherche. Elle devrait également permettre de mieux comprendre les contraintes, de mieux cerner les solutions possibles, de mieux articuler enseignement et recherche. Notons que certaines tâches répétitives et chronophages, comme par exemple la construction des emplois du temps, pourraient être assumées par du personnel de l'UFR afin de libérer du temps pour les activités liées à la recherche.

Dans la même optique d'articulation recherche-enseignement, il sera demandé qu'en bureau d'UFR, il y ait des représentants au titre de la recherche (notamment un représentant de la direction du laboratoire) et non pas uniquement des représentants des formations.

Il est également important de mettre en place un système de diffusion d'informations efficace et régulier. Une partie du tableau face à la salle café sera utilisé en ce sens : relevé de décisions et PV, informations diverses utiles aux enseignants-chercheurs et chercheurs.

Une direction à quatre têtes. Certaines décisions demandent de la réactivité et il ne sera parfois pas possible, pour des raisons de calendrier, de réunir le conseil de laboratoire. Le porteur du projet souhaite donc former un comité de direction à quatre têtes, composé des trois chefs d'équipes et de lui-même. Un directeur adjoint sera nommé parmi les trois chefs d'équipes afin de donner de la souplesse au fonctionnement de la direction. Aucune décision ne pourra être prise sans réunion de direction. Toute réunion de direction pour laquelle une décision importante sera prise se soldera par la rédaction d'un compte-rendu mis à disposition des membres du laboratoire sur le panneau face à la salle café. Le directeur du département de mathématiques, ainsi qu'un représentant de la composante informatique du LAMA seront consultés pour des décisions en lien avec l'articulation recherche-enseignements.

1.3.2 Pôle secrétariat et gestion de contrats

Compte-tenu de la croissance du nombre de contrats et de projets ANR, nous souhaiterions nous appuyer sur un IE spécialiste de la gestion et du suivi de contrats, en particulier pour monter des projets nationaux mais aussi des contrats européens, qui demandent une bonne maîtrise administrative, financière et de l'anglais. Il est également important de repenser le mode de fonctionnement du secrétariat afin de mieux correspondre aux nouveaux impératifs des enseignants-chercheurs et chercheurs.

1.3.3 Problème de locaux, parc informatique, bibliothèque

– *Problème de locaux.* Le bâtiment Le Chablais dans lequel est hébergé le LAMA est un bâtiment de petite taille qui accueille deux laboratoires. La croissance de notre unité et le flux lié de chercheurs invités, post-doctorants et stagiaires va nous amener à devoir trouver des solutions quant à l'aménagement du "territoire". Un groupe de personnes du laboratoire sera convié à se pencher sur ce problème et à proposer des solutions.

– *Achat d'ouvrages scientifiques (fond de bibliothèque LAMA).* Le LAMA possède actuellement une très petite bibliothèque de mathématiques avec un budget annuel d'environ 1500 euros. Une salle spécifique est dédiée au deuxième étage du bâtiment Chablais avec un accès libre aux chercheurs. Nous souhaitons mettre en place un plan pluriannuel de développement de notre bibliothèque pour arriver à un fond d'environ 1000-1500 livres, couvrant les ouvrages fondamentaux relatifs aux

thématiques de recherche du LAMA. De cette manière les chercheurs locaux ainsi que leurs invités trouveraient sur place une base documentaire satisfaisante pour mener à bien leurs travaux.

Sur les quatre prochaines années, nous souhaiterions obtenir une somme de 60.000 euros. Toutes les sources possibles de financement seront sollicitées : crédits universitaires de recherche, PPF, CNRS, subventions régionales.

– *Parc informatique et site internet du LAMA.* Même si le LAMA est une petite structure, le parc informatique est non négligeable et la maintenance d'un site oueb demande un investissement humain conséquent. Nous avons la chance actuellement qu'un enseignant-chercheur (C. RAFFALLI) et une ingénieure de recherche (C. ACARY-ROBERT) prennent sur leur temps de recherche pour gérer ce parc ainsi que le site internet. Il est urgent de bénéficier d'un appui spécialisé et à plein temps. Outre le fait de décharger deux chercheurs, ceci permettrait par exemple de revoir le site internet du laboratoire pour le rendre plus souple d'utilisation et plus attrayant. Une demande sera faite en ce sens sans doute dans le cadre de la fédération des sciences fondamentales.

La restauration des membres du LAMA Le repas est normalement un moment privilégié où les membres de l'unité (enseignants-chercheurs, chercheurs et ITAs) échangent des informations, discutent de problèmes, avancent certains dossiers. Or on constate l'absence de structure adéquate pour le personnel de l'Université.

Plusieurs options pourraient pourtant être envisagées :

- 1) La subvention pour repas au centre Sodexo.
- 2) L'aménagement d'une salle pour le personnel au RU avec une propre ligne de self.

1.4 Conclusion

Nous espérons par ces quelques lignes avoir permis au lecteur de cerner le projet ambitieux du LAMA dans le cadre du quadriennal 2011-2014. La force de notre unité est le mélange d'un fort potentiel d'interactions entre équipes et d'une reconnaissance internationale de chaque équipe sur ses thèmes de prédilection.

Chapitre 2

Projet de l'équipe EDPs²

2.1 Introduction

Comme nous l'avons dit dans la partie bilan, l'équipe EDPs² a fait peau neuve très récemment. Elle est depuis peu composée de plusieurs enseignants-chercheurs et chercheurs, en parfaite complémentarité, spécialistes en analyse et/ou calcul scientifique des équations aux dérivées partielles, théorie des processus stochastiques et/ou probabilités numériques. Le thème fédérateur : « Équations aux Dérivées PartielleS non linéaires : Études Déterministes et ProbabilisteS », a donné son nom : EDPs² à l'équipe. D. Bresch a été responsable de l'équipe pendant quatre ans sur le précédent quadriennal et D. Bucur lui succèdera à compter de mars 2010.

Politique scientifique de l'équipe

Comme nous l'avons précisé dans la partie bilan, les travaux de l'équipe ont porté sur les aspects théoriques et numériques des thèmes suivants :

- les problèmes à frontière libre,
- l'analyse spectrale et les EDPs singulières,
- l'influence des petites échelles,
- les problèmes inverses et rétrogrades : aspects géométriques et probabilistes,
- l'analyse non linéaire.

Ces thèmes ont donné lieu a de nombreuses publications et font l'objet de travaux en cours (voir les projets dans les pages suivantes). Il va sans dire que l'équipe EDPs² prévoit bien évidemment continuer de développer ces axes de recherche.

Ouvertures, interactions

Lors du précédent contrat quadriennal, une dynamique mêlant théorie et calcul scientifique s'est créée autour des thématiques citées ci-dessus et chacun a pu mesurer le bénéfice de cette synergie.

Suite à la nécessité de recruter un professeur spécialiste des probabilités pour prendre en charge la responsabilité du Master IDESSSE (Ingénierie des Données en Sciences Sociales et Économie), l'équipe EDP a réfléchi à l'opportunité, du point de vue de son activité de recherche, de faire un tel recrutement sur le poste EDP vacant après mutation de I. Ionescu à Paris XIII. Il nous est alors apparu intéressant de tenter l'aventure si tant est que le laboratoire ainsi que l'Université appuient l'arrivée de P. Briand par un maître de conférences. Cette ouverture vers les probabilités, loin d'être une dispersion thématique, traduit le souhait de l'équipe d'élargir son spectre de compétences pour aborder avec différents points de vue (théorique ou numérique, déterministe ou stochastique) des problèmes de frontière libre (états d'équilibre et dynamique, imagerie, évolution de support), d'échelles et physiques multiples (fluides complexes, imagerie), d'effets d'homogénéisation et de mesures de défaut (rugosités, fractures), d'études de modes propres (propagation d'ondes,

recherche d'états stationnaires sous contraintes), d'optimisation et d'identification (transport optimal, assimilation de données, identification de paramètres, fiabilité).

Un tel rapprochement entre analyse ou analyse numérique des EDPs et théorie des processus stochastiques ou probabilités numériques n'est pas nouveau ; cette démarche est adoptée depuis longtemps par des chercheurs de premier plan.

Nous souhaitons tirer parti de cette complémentarité sans abandonner pour autant les domaines d'expertises de chacun sur lesquels notre équipe est compétitive au niveau national voire international. Actuellement l'équipe est impliquée dans trois projets ANR. Les axes futurs de recherche sont donc, en grande partie, définis par la participation à ces projets. Dans le domaine de l'aléatoire proprement dit, des travaux sont également en cours. D'autres projets spécifiques devraient également voir le jour, par exemple avec l'interaction de P. Briand avec E. Gobet du LJK de Grenoble.

2.2 Projets en cours

L'équipe EDPs2 participe à trois projets ANR avec d'autres centres universitaires : Rennes, Nancy, ENS Paris, Bordeaux, Lyon.

ANR GAOS : Analyse géométrique des formes optimales

Cette ANR est portée par D. Bucur, et E. Oudet, P. Briand, M. Bonnivard en font partie. Les autres centres de recherche associés à ce projet sont l'ENS de Cachan à Rennes et l'Institut Elie Cartan de Nancy. Le but de ce projet est de développer des analyses qualitatives d'optimisations de formes dans un cadre variationnel en se focalisant principalement sur les formes singulières et non-régulières en lien avec des contraintes topologiques et/ou géométriques. Les différents axes sont les suivants : régularité de formes optimales, études liées à la classe des corps convexes avec notamment une approche probabiliste, aspects numériques des formes singulières, les inégalités géométriques et enfin les domaines nodaux et les partitions minimales spectrales.

ANR MathOcean

Cette ANR est portée par D. Lannes de l'ENS Paris. Les différents centres associés à ce projet sont l'IMB de Bordeaux, le laboratoire de Mathématiques de Montpellier, l'ENS Paris et le LAMA avec D. Bresch comme responsable local. C. Acary-Robert, C. Bourdarias, D. Dutykh, S. Gerbi, M. Gisclon, T. Ngom et M. Ersoy font partie de ce projet. Ce projet a pour objectif une meilleure compréhension de certains phénomènes observés en océanographie. Les outils mathématiques et numériques développés ont une portée qui dépasse de loin le domaine de l'océanographie et pourront concerner d'autres problèmes d'écoulements comme ceux d'EDF Chambéry par exemple. La complexité et la variété de ces phénomènes (par exemple : déferlement des vagues, turbulence faible, optimisation de structures côtières, cavitation, etc.) requiert des outils novateurs dans des domaines de recherche souvent disjoints et qui vont de la modélisation physique à l'analyse mathématique abstraite, en passant par les simulations numériques et les applications environnementales. Nous obtiendrons de nouveaux modèles physiques et développerons des outils mathématiques efficaces pour décrire ces phénomènes. En particulier, une attention spéciale sera prêtée à deux problèmes mathématiques : l'analyse de problèmes au bord (et du couplage) de systèmes complexes d'EDP, et une approche rigoureuse d'écoulements multi-phases. Dans le même esprit, des algorithmes numériques de type volumes finis ou cinétiques d'un intérêt général seront développés.

ANR MANIPHYC : Maths-Numerics-Physics Complex

Cette ANR est portée par L. Bocquet, physicien à l'université de Lyon 1. Les différents centres associés à ce projet sont le LOF (Rhodia, Bordeaux), l'IMB de Bordeaux, l'Institut Camille Jordan à Lyon, ainsi que le LAMA avec D. Bresch comme responsable local. C. Acary-Robert, J. Olivier en font partie et P. Briand devrait avoir un rôle à y jouer, notamment dans le cadre des couplages micro-macro qui mixent aspects EDPistes et aspects probabilistes. Les mousses, les émulsions sont des matériaux désordonnés. Le but de ce projet est de développer une approche concertée

mathématiques-numérique-physique pour développer une compréhension multi-échelles des écoulements de ce type de matériaux. Les différents axes de recherche sont les suivants : développer et valider un modèle macro non local (mise en place d'un modèle multi-dimensionnel), comprendre les liens méso-macro et prendre en compte les comportements statistiques liés aux micro-échelles, justifier mathématiquement le comportement des solutions sous certaines conditions d'écoulement (cisaillement, oscillations de bord par exemple). Notons que ce projet ANR a également beaucoup d'intérêt dans le cadre de la biologie et de la médecine. Ces études se font en partenariat avec l'équipe INRIA Numed dont le responsable est E. Grenier.

L'équipe EDPs² comporte actuellement trois membres travaillant dans le domaine de l'aléatoire : E. Idée travaillant en statistique et plus particulièrement en fiabilité, P. Briand, arrivé en septembre 2008, travaillant en probabilités, principalement sur les équations différentielles stochastiques et C. Lécot travaillant sur les méthodes quasi-Monte Carlo. Des travaux internes à cette composante sont en cours :

Estimation des paramètres de la loi de Weibull

P. Briand et E. Idée ont développé, pour les besoins du contrat avec EDF Paris n° MRI/018, une méthode d'estimation des paramètres d'une loi exponentielle translatée. Cette approche s'applique pour des échantillons de petite taille, seule situation réaliste pour les applications traitées dans ce contrat. L'objectif est maintenant double. Dans un premier temps, étendre cette méthode au cas de la loi de Weibull qui fait apparaître, contrairement à la loi exponentielle, un paramètre de forme qui rend l'estimation plus délicate. D'autre part, dans le cadre de leur étude pour EDF, P. Briand et E. Idée sont amenés à déterminer l'impact réel d'un facteur exogène sur l'estimation des paramètres ; ils souhaitent étendre leur méthode à ce contexte.

Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades

Les EDSR et leurs applications constituent l'axe de recherche principal de P. Briand qui souhaite tout naturellement développer plusieurs sujets dans cette direction. Tout d'abord, il s'agira de poursuivre la collaboration avec F. Confortola, M. Fuhrman, G. Tessitore de Milan et Y. Hu de l'IRMAR à Rennes sur les problèmes de contrôle stochastique en dimension infinie, avec un intérêt tout particulier pour le contrôle ergodique où le cas quadratique, le plus fréquent dans les applications, reste ouvert. D'autre part, une collaboration avec E. Gobet du LJK de Grenoble autour des mathématiques financières où les EDSR jouent un rôle important s'est faite dès l'arrivée de P. Briand. Ils co-encadrent une thèse CIFRE portant sur les risques liés à la valorisation des actifs gaziers. Ils souhaitent au cours de ce prochain contrat quadriennal renforcer cette collaboration. La simulation des solutions d'EDSR sera également un axe d'investigation, sujet largement étudié dans les dernières années mais pour lequel très peu de résultats sont connus dans le cas quadratique apparaissant notamment en finance.

2.3 Des projets de structuration en cours

Outre les 3 projets ANR, d'autres projets fédérateurs sont en cours. Nous en citerons quelques uns :

— Le projet MODI (modélisation d'interface) porté par E. Oudet et qui associe D. Bucur de l'équipe EDPs² ainsi que J.-O. Lachaud et L. Vuillon de l'équipe LIMD. L'objectif de ce projet est l'étude des différentes modélisations des formes géométriques dans le but de la simulation et de l'optimisation avec transfert des compétences acquises dans la modélisation des phénomènes d'auto-organisation en biologie cellulaire (condensation des cellules dans un biogel, structure mince 1D en 3D avec application à la croissance vasculaire, structure kD en 4D avec application à la modélisation du cytosquelette.) Ce travail devrait se faire en partenariat avec A. Stéphanou (CR CNRS de Grenoble). Le but à terme serait de réussir à créer une équipe INRIA autour de ce projet. Des discussions sont en cours avec les responsables de l'INRIA.

— Le projet porté par D. Dutykh concernant les tsunamis en partenariat avec D. Clamond de l'Université de Nice intéresse également des chercheurs d'autres disciplines sur l'Université de Savoie comme C. Beck du LACG. Il s'agit principalement d'étudier les effets de compressibilité dans la phase de génération des tsunamis par glissement de terrain.

— Le projet, porté par D. Bresch et D. Dutykh, associe C. Bourdarias, C. Acary-Robert, S. Gerbi et M. Gisclon. Un choix astucieux de lois de fermetures au sein de modèles numériques permet d'obtenir des propriétés qualitatives de stabilité. La précision et la robustesse des simulations numériques de ces écoulements est particulièrement importante dans les applications « Défense », qui comportent chocs violents, impacts et fortes détonations. Recourir à la simulation est indispensable pour maîtriser la complexité croissante des systèmes, particulièrement dans le domaine de la Défense. Le choix des modèles physiques et de leur discrétisation dans les logiciels de simulation est intimement lié aux méthodes numériques utilisées, mais également aux propriétés et à la stabilité intrinsèque des modèles continus. Il s'agira d'étudier les effets mathématiques des choix d'équations d'états, de tenseurs de Reynolds, de conductivité thermique sur des modèles d'équations aux dérivées partielles non linéaires d'intérêts pratiques. Il s'agira également de mettre en place une analyse mathématique rigoureuse d'obtention des modèles multi-fluides ou multi-phases et d'en décrire quelques-unes de leurs propriétés. Une procédure de mise en place d'une équipe "recherche exploratoire et innovation" est en cours avec la DGA.

— Deux projets liés à la neige et aux glaciers :

1) Un projet afin de mieux comprendre les effets de seuil dans le déclenchement d'avalanches, de mieux décrire les neiges poudreuses par une approche d'écoulements multiphasiques, d'être capable d'en comprendre l'impact par une approche fluide/structure, de décrire la dynamique en temps long pour les glaciers. Cette étude s'effectue dans le cadre fédération Rhône-Alpes VOR, auprès de laquelle D. Dutykh est représentant du LAMA. Des discussions sont en cours avec le CEMAGREF de Grenoble et l'EPFL de Lausanne.

2) Un projet où nous comptons mélanger les méthodes continues d'évolution avec les modèles de partition déformable discrète. Plus précisément, nous comptons participer au projet de géométrie discrète, centré sur l'étude, la représentation et la simulation de micro-blocs de neige 3D, initié par J.-O. Lachaud de l'équipe LIMD, en partenariat avec le LIRIS (Lyon) et le CEN (Grenoble). Le CEN étudie les blocs de neige en les imageant par micro-tomodensitométrie. L'objectif est de savoir représenter ces volumes de données (topologie, géométrie) de façon compacte, de calculer efficacement des quantités géométriques, et de simuler l'évolution des blocs et des grains sous l'action de paramètres complexes, tels que les effets thermiques et de compression. Ce projet est dans la continuité du projet MODI sur les représentations des interfaces et fera appel à des compétences en analyse, modélisation et simulation numérique présentes dans l'équipe EDPs².

— Nous continuerons également les diverses interactions avec Grenoble et Lyon : LJK, Institut Fourier, Institut Camille Jordan et UMPA ENS Lyon, CEA Grenoble sur les aspects microfluidiques, rugosités, surface libre, mathématiques financières, ...

— En ce qui concerne les collaborations avec l'étranger, l'équipe continuera les relations qu'elle a établies : voir la partie bilan pour la liste des partenaires.

2.4 Faiblesse et force de notre équipe

En ce qui concerne la faiblesse, notre équipe est déséquilibrée avec 6 rangs A, 4 rangs B + 1 ITA. À ceci s'ajoute le fait que quasiment tous les membres de l'équipe EDPs² auront obtenu leur Habilitation à diriger la Recherche en 2010 avec aucun départ actuellement. Il s'agit là d'un problème lié à une petite structure. Heureusement notre équipe a accueilli au cours de ce dernier quadriennal 2 chercheurs CNRS et deux enseignants-chercheurs en délégation CNRS ou sabbatique. Il serait vraiment structurant de pouvoir bénéficier de l'arrivée de deux autres Chargés de Recherche CNRS : l'un pour appuyer l'interaction EDPs-Probabilités et l'autre pour appuyer l'interaction théorie-calcul scientifique.

La force de notre équipe est d'être composée d'enseignants-chercheurs et chercheurs en parfaite complémentarité, spécialistes en analyse et/ou calcul scientifique des équations aux dérivées partielles,

théorie des processus stochastiques et/ou probabilités numériques. Cette configuration devrait être garante de travaux de recherche originaux.

Chapitre 3

Projet de l'équipe Géométrie

3.1 Introduction

Le LAMA contient dans son champ d'activités des mathématiques pures, des mathématiques appliquées et des mathématiques liées à l'informatique. Les trois composantes ont évoluées harmonieusement et avec succès jusqu'à présent. Il est indispensable dans l'évolution du laboratoire que le potentiel en 25ème section, qui est essentiellement concentré dans l'équipe de géométrie, demeure et puisse se développer en conservant sa diversité, mais aussi une cohérence dans ses sujets de recherche : chacun s'attache à comprendre le travail des autres et peut apporter des observations utiles.

Dans les quatre prochaines années, l'équipe va recruter un PR (retraite de F. Pelletier), un MCF (retraite de M. Decauwert) et un MCF suite à une promotion probable d'un de nos MCF habilités (F. Mangolte est HDR depuis 2004, F. Bihan et P. Verovic, devraient soutenir très prochainement).

Politique scientifique de l'équipe

Nous souhaitons que chaque nouveau collègue renforce une des directions des recherches actuelles (géométrie algébrique réelle et singularités réelles, théorie des structures o-minimales, géométrie sous-riemannienne, singularités en théorie du contrôle et physique mathématique), ou apporte une complémentarité au travers de nouvelles thématiques de recherche, par exemple en topologie différentielle, symplectique, structures de contact, applications de la géométrie en optimisation.

L'équipe va poursuivre ses collaborations nationales et internationales qui ont été couronnées de succès. Elle s'ouvre aussi à des collaborations nouvelles, en particulier avec les autres équipes du LAMA dans la thématique de la visualisation.

Une partie de l'équipe (géométrie analytique réelle et singularités réelles) va déposer une demande de projet auprès de l'ANR (sur le thème des équations différentielles et de la géométrie analytique réelle), projet auquel seront associés A. Parusinski (Nice), J-M. Lion (Rennes) et J. Ph. Rolin (Dijon).

Nous allons aussi participer au futur GDR Singularités, ainsi qu'aux activités du Séminaire de Géométrie et de Théorie de Modèles à l'ENS Paris.

3.2 Projets en cours

F. Bihan compte poursuivre son travail sur la topologie des variétés creuses (bornes sur les nombres de Betti). Une direction possible consiste à étudier les systèmes dont les équations sont des polynômes (et non plus seulement des combinaisons linéaires) en des monômes donnés, comme

c'est déjà le cas dans le livre *Fewnomials* de Khovanskii. Une autre direction consiste à étudier des systèmes creux non génériques au sens où le support de chaque équation est fixé (et pas seulement l'union de ces supports qui est le support total du système).

F. Bihan et F. Mangolte vont travailler sur le problème du nombre maximal de points doubles sur une surface réelle de type donné.

K. Kurdyka va poursuivre sa collaboration avec L. Paunescu sur la désingularisation de familles analytiques de matrices et de champs de vecteurs. Il va collaborer avec A. Parusinski et T. Fukui sur les propriétés des fonctions arc-analytiques.

K. Kurdyka et S. Simon, en collaboration notamment avec J. Bolte (Paris 6), A. Danilidis (Barcelone, Espagne) et éventuellement Y. Yomdin (Weizmann, Israël), A. Yoffe (Haifa, Israël), souhaite poursuivre l'étude du flot de gradient, plus particulièrement dans la direction des applications de la méthode du talweg en optimisation. Une autre direction (plus géométrique), qui pourra aussi impliquer d'autres membres de l'équipe, est l'étude du talweg d'une fonction analytique sur une variété compacte en liaison avec l'homologie de Morse.

F. Mangolte travaille actuellement en collaboration avec J.-Y. Welschinger de l'ENS Lyon sur une question fondamentale à propos des variétés uniréglées de dimension 3 : il s'agit de savoir si une composante connexe de la partie réelle d'une telle variété peut porter une géométrie Sol. Cette question est très difficile. (Elle mène à la solution d'une conjecture de Kollár). Une voie prometteuse est l'utilisation de la théorie symplectique des champs.

P. Orro et K. Kurdyka, à l'occasion de la thèse en cours de A. Grzesinski (allocation fléchée du ministère), vont travailler sur la généralisation de la thèse récente de S.T. Dinh. Il s'agit d'une étude inédite qui a été faite dans une situation issue de la géométrie sous-riemannienne et de la théorie du contrôle où des phénomènes nouveaux apparaissent. Cette difficulté majeure a certainement empêché le développement antérieur de cette théorie. Nous proposons divers prolongements des résultats de la thèse de S. T. Dinh, en particulier : une théorie de Morse pour les structures de contact (en liaison avec l'homologie de Morse) ou bien une étude dans le cas d'une distribution de codimension plus grande que 1 (particulièrement intéressante pour la théorie du contrôle ou la géométrie sous-riemannienne).

F. Pelletier, en collaboration avec F. Farah et M. Slayman en poste à Beyrouth (Liban), va travailler sur les perspectives offertes par la thèse de F. Farah (soutenue au LAMA sous sa direction). Les résultats de la thèse de F. Farah portent une théorie de connexion intrinsèque avec contrainte, et parmi les perspectives mentionnons l'interprétation de la courbure négative, (resp. positive) pour les connexions intrinsèques avec contraintes et la notion d'espaces symétriques avec contraintes.

Il va poursuivre sa collaboration avec M. Popescu à travers l'étude dans des espaces de Hilbert des "systèmes linéaires contrôlés" : ensemble d'accessibilité, contrôlabilité, problèmes d'optimalité...

Il va étudier avec P. Cabau des problèmes de singularités de variétés de Poisson dans un contexte de variétés fréchetiques. En collaboration avec P. Cabau et T. Wurzbacher et sur la base des résultats de la thèse de A. Lathuille sur l'intégrabilité des distributions dans les variétés banachiques, il va tenter de généraliser, dans le contexte banachique, le résultat de Weinstein (en dimension finie) sur les variétés de Poisson.

S. Simon et P. Verovic vont collaborer sur le thème du gradient et de sa dynamique lors d'une perturbation de la métrique riemannienne (voire dans un cadre finslérien) en vue d'applications à l'homologie de Morse. La définition d'un talweg donnée par d'Acunto et Kurdyka utilise le gradient d'une fonction de Morse. L'étude de la dynamique d'un champ (pseudo-)gradient conduit notamment à l'homologie de Morse (*sujet qui a donné lieu à un séminaire local en mars 2008*). Dans le thème précité, on travaille en particulier à donner une définition du gradient en géométrie finslérienne, à comprendre les modifications engendrées par perturbation de la métrique et à en déduire des applications à l'homologie de Morse.

P. Verovic développera en outre sa recherche dans deux autres directions :

- Étude consistant à comparer l'exposant critique de Poincaré $\delta(\Gamma)$, l'entropie volumique $h(M)$ et le bas du spectre essentiel $\lambda_0(M)$ d'un quotient $M = M_0/\Gamma$ de volume fini d'une variété riemannienne complète M_0 , simplement connexe, à courbure sectionnelle pincée par un réseau d'isométries Γ de M_0 . D'intéressants résultats ont été récemment obtenus dans [10] qui montrent que si Γ est uniforme, alors $\delta(\Gamma) = h(M)$, mais que cette égalité n'est pas toujours vérifiée dans le cas général, sauf si M_0 est 1/4-pincée.

Ce travail a été commencé en collaboration avec Bruno Colbois (université de Neuchâtel, Suisse)

- Étude du problème du minimum de l'entropie pour les métriques de Finsler : étant donné une variété M_0 munie d'une métrique riemannienne hyperbolique g_0 et Γ un réseau co-compact d'isométries de (M_0, g_0) , est-ce que le minimum de l'entropie volumique est réalisé par g_0 parmi toutes les métriques de Finsler sur le quotient $M = M_0/\Gamma$ normalisées par le volume de Busemann (ou celui de Holmes-Thompson) ? La réponse est positive lorsqu'on se restreint aux métriques de Riemann ([11]), mais ce problème reste toujours ouvert dans le cas général, bien que des avancées aient été faites pour le résoudre ([21] et [1]).

Ce travail pourra s'inscrire dans le projet ANR initié par Anathase Papadopoulos (université de Strasbourg) autour du thème « Géométrie de Finsler et dynamique lagrangienne ».

3.3 Projets de structuration

S. Simon et J.-O. Lachaud (LIMD) vont collaborer sur le thème de la polygonalisation de surfaces implicites (à l'aide d'outils de topologie discrète, suivi de surface et techniques d'effondrement) et ses relations avec l'homologie effective. En considérant une classe de surfaces (semi)algébriques, on espère contrôler les singularités et garantir la topologie locale.

3.4 Faiblesse et force de notre équipe

Notre équipe souffre de sa petite taille : 2 PR, 4 MCF en 2010, et plusieurs de ses membres exercent ou ont récemment exercé des charges lourdes, et pour certains très lourdes, dans l'administration du laboratoire et de l'université.

Malgré ce contexte difficile, l'équipe travaille avec succès dans les domaines très concurrentiels de la géométrie algébrique et différentielle (au sens large), où une prise de risque est nécessaire. Elle a su montrer son dynamisme et son originalité par l'ouverture de nouvelles voies de recherche notamment à l'interface de la géométrie algébrique réelle et de la géométrie sous-riemannienne.

De nouvelles synergies sont encore à explorer et il est indispensable que l'équipe puisse se renforcer par une consolidation de ses forces vives, au delà des remplacements. Le soutien du laboratoire sur les objectifs de l'équipe doit se concrétiser par l'appui au recrutement d'au moins un MCF (ou CR) et d'un PR (ou DR), que ce soit dans les directions qui font sa réputation ou dans une thématique d'ouverture cohérente.

-
- [10] D. F., P. M., P. J.-C., and S. A. On the growth of nonuniform lattices in pinched negatively curved manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, 627 :31–52, 2009.
- [11] B. G., C. G., and G. S. Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geom. Funct. Anal.*, 5(5) :731–799, 1995.
- [21] V. P. Problème de l'entropie minimale pour les métriques de finsler. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 19(6) :1637–1654, 1999.
- [1] C. B., N. F., and V. P. Some smooth Finsler déformations of hyperbolic surfaces. *Ann. Global Anal. Geom.*, 35(2) :191–226, 2009.

Chapitre 4

Projet de l'équipe LIMD

4.1 Introduction

Comme expliqué dans la partie rapport, l'équipe se compose de deux pôles autour des thèmes de recherche suivants :

1. Théorie de la démonstration, λ -calcul, fondements et implantation des langages de programmation, application à la linguistique,
2. Géométrie discrète, combinatoire des mots, pavages et systèmes dynamiques discrets.

Les notions de calcul, de programme et d'algorithme sont centrales à ces thèmes et donnent son unité à l'équipe. Cette unité se manifeste de plusieurs façons :

1. Des recherches qui portent sur la notion même de calcul dans chacun des pôles avec leurs propres points de vue, par exemple :
 - La notion de *composition* ou d'*assemblage* de programmes, cruciale en sémantique des langages de programmation,
 - Les notions de *complexité* et d'*universalité*, centrales notamment au thème des automates cellulaires ;
2. Des recherches dans chacun des pôles avec de forts aspects algorithmiques et de programmation, par exemple :
 - la résolution de problèmes algorithmiques issus de la géométrie discrète, avec souvent des contraintes de temps réel (voir page 22),
 - l'algorithmique du typage, qui est l'un des points clefs du projet PML (détaillé page 19, principalement manipulation de graphes étiquetés dans des treillis) ;
3. Des outils mathématiques communs, par exemple la théorie des ordres ou la topologie ;
4. Des recherches transversales aux deux pôles, par exemple : la problématique du comptage, dans un système formel donné, des objets syntaxiques ayant une propriété sémantique ou globale donnée a été suivie d'une part par R. David (comptage de preuves en logique propositionnelle^[7]) et d'autre part par G. Theyssier (densité des propriétés dans les automates cellulaires^[26]). Comme détaillé page 21, cette problématique est poursuivie par R. David, C. Raffalli et G. Theyssier dans un nouveau contexte (densité des propriétés dans les λ -termes).

[7] R. David and M. Zaionc. Counting proofs in propositional logic. *CoRR*, abs/0905.2880, 2009.

[26] G. Theyssier. How common can be universality for cellular automata? In V. Diekert and B. Durand, editors, *STACS*, volume 3404 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 121–132. Springer, 2005.

4.2 Projets en cours

Théorie de la démonstration et programmation

En théorie de la démonstration et programmation, notre activité s'étend des fondements à l'implantation d'un langage de programmation expérimental, PML, qui permet de démontrer des propriétés sur les programmes. Côté fondements, nos travaux portent d'abord sur la correspondance de Curry-Howard^[16] entre démonstrations et programmes, ainsi que sur son extension à la réalisabilité. Plus généralement, nous travaillons sur les langages de programmation, de leur spécification à leur compilation. Un objet mathématique central à ces travaux est le λ -calcul de Church^[5].

Programmation : PML PML, P. Hyvernât, C. Raffalli, L. Vaux (ATER). Nous travaillons sur le langage expérimental PML [4]. PML est à la fois un langage de programmation fonctionnel et un outil d'aide à la démonstration, doté d'un langage commun de programmation, de typage et de preuve. Cette unification transgresse les paradigmes standard de *proofs as programs* et *propositions as types*, les remplaçant par *programs as types, propositions, and proofs*.

Programs as types En tant que langage de programmation, PML est un langage sûr, comme ML, mais essentiellement non typé. Le compilateur assure la sûreté en générant un ensemble de contraintes à partir du programme et en vérifiant l'existence d'un modèle de réalisabilité pour ces contraintes, sans pour autant construire un tel modèle. Cette technique apporte une flexibilité nouvelle au langage, tout en conservant la sûreté au sens de ML. Mieux : recyclant une vieille idée de théorie des domaines, le langage permet, lorsque le programmeur le souhaite, d'exprimer les types comme des identités partielles (dont l'image est le type lui-même).

Programs as propositions and proofs Pour les démonstrations, la logique de PML est la théorie équationnelle du langage ML. L'observation cruciale faisant de PML un outil de preuve est que la validité dans cette logique peut se ramener à un problème de détection de code mort. La logique obtenue est expressive, en particulier grâce à l'utilisation des fonctions de première classe pour encoder les quantificateurs.

Le noyau de vérification des preuves, i.e., le détecteur de code mort, est léger et repose sur une variante de l'algorithme de Knuth-Bendix^[18], restreint aux termes clos (ce qui garantit sa terminaison).

Cette approche permet des preuves à la fois concises et lisibles par un programmeur, à tel point que l'on peut les écrire sans interaction compliquée avec la machine (comme des preuves habituelles). Par exemple, on utilise le *pattern-matching* pour raisonner par cas. Ceci permet d'espérer un apprentissage plus facile du système.

Originalité de l'approche PML est le seul outil de preuve à utiliser les programmes à la fois comme langage de programmation, de typage et de preuve. Le tableau ci-dessous résume la situation pour les principaux outils comparables :

	ACL2	Agda	Coq	PAF	Why	PML
Prog. as Types.						✓
Prog. as Prop.	✓	✓	Possible	✓	✓	✓
Prog. as Proofs		✓	+/-			✓
Logique	Eq(Lisp).	Th. Types	Th. Types	SOL(ML)	Hoare	Eq(ML)

(+/- = possible, mais peu praticable, Eq(X) = théorie équationnelle de X, Th. Types = une théorie des types, SOL(ML) = logique du second-ordre sur la théorie équationnelle de ML).

[16] W. Howard. The formulae-as-types notion of construction. In J. Seldin and J. Hindley, editors, *To H.B. Curry : Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, pages 479—490. Academic Press, 1980.

[5] A. Church. *The calculi of lambda-conversion*. Princeton University Press, 1941.

[18] D. Knuth and P. Bendix. *Computational Problems in Abstract Algebra*, chapter Simple word problems in universal algebras, pages 263—297. Pergamon Press, Oxford, U. K., 1970. Reprinted in *Automation of Reasoning 2*, Springer-Verlag, Berlin, pages 342—376, 1983.

Travail accompli Le travail initial a consisté en un développement expérimental du code. Très vite, une première version d'un interprète à été disponible et même utilisée pour enseigner en M1 d'informatique. Le point essentiel de ce développement est l'algorithme permettant d'assurer la sûreté du langage.

Un article de plus de 30 pages a été écrit puis abandonné avant publication car les concepts ont évolué grâce aux expérimentations sur l'implantation. Un nouvel article, en cours de finalisation, décrira les principes de base du langage.

Travaux en cours et futurs

- Compléter l'étude théorique de PML, en particulier par une preuve de consistance, en présence d'extensionnalité.
- Introduire une dose de programmation impérative dans PML, en adaptant les techniques de *uniqueness typing*^[2] du langage Clean^[24].
- Produire un compilateur utilisant LLVM^[19] et faire de PML un langage réellement utilisable en production.
- Tester PML sur des exemples réalistes, en particulier quant à la faisabilité des preuves de spécifications. Sur le très long terme, cela peut inclure le *bootstrap* de PML, incluant la correction des vérificateurs de contraintes et de preuves.

Théorie de la démonstration et de la programmation Fondements des langages de programmation, T. Hirschowitz, F. Hatat (doctorant), avec R. Garner (Cambridge), A. Hirschowitz (Nice), M. Hirschowitz (CEA) et L. Vaux (Marseille). L'approche formelle des langages de programmation a fait ses preuves, mais reste limitée techniquement par son manque de modularité : la recherche en langages de programmation, de la certification de compilateur aux questions d'équivalences comportementales (en particulier fondées sur la bisimulation), procède langage par langage, sans pour l'instant de cadre général communément accepté. Nous poursuivons notre recherche d'un tel cadre, selon deux pistes distinctes.

La première piste suivie est algébrique et se fonde sur la notion de catégorie *double* symétrique monoïdale fermée (SMCDC) (des notions similaires ont déjà été pressenties dans ce cadre par l'école Montanari^[12,4] et Melliès^[20]). Nous commençons par traiter des langages particuliers en tentant de construire des SMCDC qui les modélisent. Si nous y parvenons, nous comptons évaluer notre modèle en étudiant des propriétés standard des langages de programmation sur ces SMCDC. Les étapes suivantes peuvent être :

- une généralisation du processus de construction des SMCDC, avec en ligne de mire une construction générale du modèle initial engendré par un langage donné,
- une étude des morphismes entre SMCDC, avec pour but de donner une notion adéquate de compilation et de développer des outils de preuve de compilation associés.

La deuxième piste suivie est celle de la sémantique des jeux, où un programme est vu comme un joueur suivant une certaine stratégie, l'environnement étant représenté par son adversaire. A travers la correspondance de Curry-Howard, nous tentons d'établir, pour l'instant dans des cadres simples, une construction systématique du cadre ludique à partir du cadre syntaxique traditionnel. Les résultats portent pour l'instant sur la prouvabilité en logique linéaire. Nous tentons actuellement de les étendre à des langages de programmation typés, en visant des résultats de *complétude pleine*^[17]. Les techniques développées semblent trouver de nouvelles applications en logique que nous comptons exploiter.

[2] E. Barendsen and S. Smetsers. Uniqueness typing for functional languages with graph rewriting semantics. *Mathematical Structures in Computer Science*, 6(6) :579–612, 1996.

[24] R. Plasmeijer and M. v. Eekelen. Keep it clean : a unique approach to functional programming. *SIGPLAN Not.*, 34(6) :23–31, 1999.

[19] LLVM. <http://www.llvm.org>.

[12] F. Gadducci and U. Montanari. Tiles, rewriting rules and CCS. *Electr. Notes Theor. Comput. Sci.*, 4, 1996.

[4] R. Bruni and U. Montanari. Cartesian closed double categories, their lambda-notation, and the pi-calculus. In *LICS '99*. IEEE Computer Society, 1999.

[20] P.-A. Melliès. Double categories : a modular model of multiplicative linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 12, 2002.

[17] M. Hyland. *Semantics and Logics of Computation*, chapter Game Semantics. Cambridge University Press, 1997.

Forte normalisation, K. Nour. Nous avons développé de nouvelles techniques purement combinatoires pour prouver la forte normalisation de diverses extensions du lambda-calcul, fournissant des preuves formalisables dans l'arithmétique du premier ordre de Peano de résultats dont les preuves existantes ne l'étaient pas. Il sera utile de connaître les limites de ces méthodes. Peut-on, par exemple, les utiliser pour montrer la forte normalisation des réseaux de preuves en logique linéaire^[14] du lambda-calcul différentiel de T. Ehrhard^[9] des restrictions des systèmes \mathcal{T} et \mathcal{F} ^[15] Peut-on caractériser les calculs pour lesquels ces méthodes s'appliquent ? Peut-on extraire de ces preuves des bornes supérieures pour normaliser les termes d'un calcul fortement normalisable ?

Réalisabilité, T. Hirschowitz, P. Hyvernât, K. Nour, C. Raffalli.

La sémantique de réalisabilité pour des λ -calculs typés n'est pas assez étudiée. Dans ses travaux de recherche, K. Nour a obtenu des résultats de complétude pour plusieurs systèmes de types par rapport à ce genre de sémantique et continuera à étudier la sémantique de réalisabilité pour des systèmes de type plus complexes en vue d'obtenir des résultats de complétude. Il est fort probable que beaucoup de résultats syntaxiques des λ -calculs typés peuvent être démontrés en utilisant cette sémantique.

D'autre part, la réalisabilité est pour l'instant surtout un ensemble de techniques. Nous travaillons à la définition d'un cadre général où ces techniques s'appliquent, ou autrement dit à une axiomatisation de la réalisabilité. Nos travaux préliminaires portent sur des variantes de la notion de *quantale*^[25].

Concurrence, N. Bernard, K. Nour, avec Y. Dumond (laboratoire d'informatique). Nos recherches portent principalement sur l'établissement d'une correspondance de Curry-Howard pour la concurrence.

λ -termes typiques et comportement typique des λ -termes, R. David, C. Raffalli et G. Theyssier en collaboration avec Katarzyna Grygiel, Jakub Kozic et Marek Zaionc (TCS, Jagellonian University, Pologne). À la suite des résultats obtenus sur la densité des termes fortement normalisables parmi les λ -termes, nous envisageons de poursuivre nos recherches dans deux directions :

- étendre le résultat obtenu à d'autres modèles de taille (voire de montrer que le résultat dépend du modèle de taille) et à d'autres propriétés (par exemple les termes typables)
- étudier la réduction aléatoire (choisir un redex au hasard et réduire) sur des λ -termes fixés, chercher des termes pour lesquels la probabilité de normaliser n'est ni 0 ni 1 et étudier le nombre moyen de redex après n étapes dans ce modèle.

Plus généralement, l'objectif de ces recherches est de comprendre comment des propriétés ou des algorithmes sur les λ -termes connus comme complexes dans le cas général (le pire cas) peuvent se révéler beaucoup plus simples voire triviaux dans le cas moyen.

Mathématiques discrètes : géométrie, combinatoire et dynamique

Nos recherches en mathématiques discrètes se fédèrent largement autour d'un même type d'objet (images, mots finis ou infinis, configurations, pavages, sous-shifts), mais avec des problématiques différentes allant de la compréhension géométrique de ces objets à l'étude de systèmes dynamiques agissant sur eux. Parmi les outils utilisés dans ces recherches, la combinatoire des mots (substitutions, suites Sturmienne, droites discrètes, etc) a une place centrale. Par ailleurs, on retrouve un questionnement de fond sous-jacent à un grand nombre de nos travaux : comprendre les liens entre contraintes ou lois *locales* et configurations ou dynamiques *globales*.

Géométrie discrète et combinatoire des mots., J.-O. Lachaud, avec L. Vuillon, X. Provençal, S. Brlek (LACIM, Montréal). La complémentarité de ces deux approches a déjà donné des résultats étonnants : convexité discrète, établissement de propriétés asymptotiques, polygone de longueur minimale. Nous souhaitons poursuivre ces travaux avec nos co-auteurs, notamment sur le

[14] J.-Y. Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50, 1987.

[9] T. Ehrhard and L. Regnier. The differential lambda-calculus. *Theoretical Computer Science*, 309, 2003.

[15] J.-Y. Girard, Y. Lafont, , and P. Taylor. *Proofs and Types*, volume 7 of *Cambridge tracts in theoretical computer science*. Cambridge University Press, 1989.

[25] K. Rosenthal. *Quantales and Their Applications*. Number 234 in Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific & Technical, 1990.

problème du calcul dynamique d'un polygone de longueur minimale sur des contours discrets déformables. Le problème de la caractérisation combinatoire de la convexité en 3D est aussi un sujet de recherche. Ce thème donnera lieu à un cours lors de l'édition 2010 de l'Ecole Jeunes Chercheurs du GDR IM, organisée par l'équipe.

Géométrie discrète multi-résolution, *J.-O. Lachaud, avec B. Kerautret (LORIA, Nancy), I. Sivignon (LIRIS, Lyon)*. L'utilisation de la multirésolution en géométrie discrète couplée à notre connaissance des propriétés asymptotiques a induit une technique non supervisée pour détecter le bruit sur les formes discrètes et plus généralement pour analyser les échelles pertinentes locales [2]. Nous travaillons maintenant aux multiples applications de cet outil, comme le paramétrage automatique des estimateurs géométriques sur des formes bruitées, la reconstruction, la détection de points caractéristiques.

Projet géométrie discrète, centré sur l'étude, la représentation et la simulation de micro-blocs de neige 3D, *J.-O. Lachaud, L. Vuillon et équipe EDPs, en partenariat avec le LIRIS (Lyon) et le CEN (Grenoble)*. Le CEN étudie les blocs de neige en les imageant par micro-tomodensitométrie. Les images 3D obtenues sont très précises (entre 300^3 et 2000^3). Ces images sont binarisées (glace/air) ou étiquetées en grains avant d'être analysées. Il s'agit donc d'un domaine d'application naturel de la géométrie discrète. Plus précisément, l'objectif est de savoir représenter ces volumes de données (topologie, géométrie) de façon compacte, de calculer efficacement des quantités géométriques, et de simuler l'évolution des blocs et des grains sous l'action de paramètres complexes, tels que les effets thermiques et de compression. Nous comptons mélanger les méthodes continues d'évolution avec les modèles de partition déformable discrète. Ce projet est dans la continuité du projet MODI, porté par l'équipe EDP, sur les représentations des interfaces.

Polygonalisation de surfaces implicites singulières, *J.-O. Lachaud et S. Simon (équipe Géométrie)*. Polygonalisation de surfaces implicites singulières à l'aide d'outils de topologie discrète et d'homologie effective. L'idée est de plonger la surface singulière dans une variété régulière de dimension supérieure, d'extraire une partie de l'hypersurface discrète induite, de l'amincir ensuite par effondrement homotopique, pour enfin projeter le 2-complexe sur l'iso-valeur nulle. Il reste notamment à étendre la technique sur des grilles adaptatives, afin d'être sûr de capturer toutes les singularités.

Pavages et approximations de plans, *L. Vuillon*. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que des pavages provenant d'approximation de plans dans \mathbb{R}^3 . Cependant, on peut continuer cette étude en calculant la complexité des pavages provenant de la projection en dimension 2 d'une approximation de plan dans \mathbb{R}^d . Ainsi, on pourrait donner la complexité du fameux pavage de Penrose qui n'est rien d'autre que la projection de l'approximation d'un plan dans \mathbb{R}^5 . Une des idées que nous souhaitons développer serait de considérer la complexité directionnelle, c'est-à-dire de considérer la suite de coupures dans une direction afin de ramener l'étude au cas unidimensionnel. Cette approche a d'ailleurs fait ses preuves d'un point de vue combinatoire pour l'étude des pavages donnés par translation d'une tuile comme dans l'article avec P. Hubert. Maintenant, on peut étudier le pavage de Penrose par suite de coupures. Ensuite, il serait important d'étudier les mots de retour (c'est-à-dire étudier les occurrences d'un mot w dans le pavage et la structure qui relie toutes les occurrences de w) sur de telles suites et enfin montrer le lien possible avec certains systèmes dynamiques donnant le pavage. Ainsi, on pourra certainement montrer que pour le cas des pavages de Penrose, le nombre de mots de retour sur tout mot dans des directions bien choisies est égal à 5 (la suite aurait donc la propriété R_5 dans le vocabulaire de Justin et Vuillon). Dans un premier temps, il est envisagé de regarder les mots de retour dans les pavages provenant de projection d'approximations de plans en dimension 3. Nous cherchons à montrer que dans ce cas le nombre de mots de retour est 3. Nous avons déjà ce résultat pour les approximations de droite où le nombre de mots de retour est 2 et nous cherchons à généraliser ce résultat. Toute la difficulté provient du fait que les mots de retour sont bidimensionnels et qu'ils ne sont pas uniques. En effet, pour le même pavage, on peut construire plusieurs mots de retour portés par des réseaux différents. L'idée serait de trouver un réseau canonique et donc un pavage par mots de retour canonique.

Extensions du théorème de Beauquier-Nivat, *L. Vuillon et G. Theyssier*. Nous recherchons une preuve alternative algébrique du théorème de Beauquier-Nivat sur la caractérisation des polyominos qui pavent le plan par translation. Le but est d'utiliser au mieux la factorisation des polyominos qui pavent, afin de trouver une preuve algébrique du cas des pavages de \mathbb{R}^3 par trans-

lation d'un polycube (généralisation directe des polyominos et du théorème). Nous recherchons donc une généralisation du théorème de Beauquier-Nivat en dimension 3. Ceci permettrait aussi d'attaquer la conjecture de Penrose. Cette conjecture prétend que pour tout pavage de \mathbb{R}^3 par translation d'un polycube, il existe au moins un pavage par ce polycube dont les translations sont portées par un réseau. Cette conjecture montre bien les liens entre théorie des pavages, algèbre et physique mathématique.

Dynamique symbolique, dynamique topologique et logique, *G. Theyssier en collaboration avec M. Sablik et E. Jeandel*. Quand on considère l'espace symbolique de dimension d $Q^{\mathbb{Z}^d}$, un grand nombre d'objets ou propriétés de dynamique symbolique ou dynamique topologique peuvent être exprimés indépendamment de d en ne faisant référence qu'à la topologie de l'espace. Pourtant, la dimension intervient parfois de façon radicale (*e.g.*, apériodicité des sous-shifts de type fini, réversibilité dans les automates cellulaires). Nous envisageons d'approfondir la compréhension de cet aspect à travers deux axes de recherche. D'une part, dans la suite de [1], nous comptons poursuivre l'étude des sous-shifts sofiques en dimension 2, avec pour premier problème : tous les sous-shifts définissables par une formule $\exists^2\forall^2 \dots \exists^2\forall^1$ sont-ils sofiques ? D'autre part, nous étudierons la complexité (au sens des hiérarchies arithmétique et analytique) de propriétés comme la sensibilité aux conditions initiales dans les automates cellulaires, et de sa variation en fonction de la dimension de l'espace.

Automates cellulaires et complexité de communication, *P.-E. Meunier (doctorant) et G. Theyssier en collaboration avec E. Goles (UAI, Santiago, Chili) et I. Rapaport (CMM, Santiago, Chili)*. A la suite des premiers travaux en collaboration avec C. Dürr^[8], nous envisageons de développer les liens entre la théorie de la complexité de communication et les automates cellulaires : il s'agit d'une part d'établir des outils fins pour étudier la complexité des automates cellulaires, là où des notions classiques comme la P-complétude sont insuffisantes ; l'objectif est d'obtenir des conditions nécessaires à certaines propriétés comme l'universalité intrinsèque, mais également de faire des liens avec des propriétés dynamiques (réversibilité, expansivité, surjectivité, etc) ; d'autre part, il s'agit d'étudier (théoriquement et expérimentalement) de petites classes d'automates à l'aune de la conjecture "P \neq NC" en utilisant les liens entre complexité de communication et profondeur de circuit. Dans ce cadre, un objectif raisonnable serait d'établir des bornes inférieures et/ou supérieures non-triviales pour la profondeur de circuit du problème de prédiction.

Changements d'échelle et universalité dans les automates cellulaires, *L. Boyer (doctorant) et G. Theyssier*. Nous envisageons d'étudier la notion de changement d'échelle dans les automates cellulaires à travers deux approches très différentes. Tout d'abord, à la suite des divers travaux sur la théorie du groupage, nous allons étudier plus particulièrement la combinaison du groupage avec la notion de facteur (lettre à lettre ou pas) : l'objectif principal est d'établir l'existence ou la non-existence d'automates universels dans ce cadre. D'autre part, en s'inspirant de la notion d'automate Euclidien de M. Pivato^[23], nous allons étudier les changements d'échelle et la notion de limite continue des automates cellulaires multi-ensemblistes (*i.e.*, ceux dont la fonction de transition locale est invariante par permutation des voisins). L'objectif principal est de comprendre comment la propriété d'universalité intrinsèque est altérée par ces changements d'échelle et comment elle se traduit dans les objets limites.

Algèbres de Boole, Topologie, Ordre et Combinatoire infinie

R. Bonnet va continuer ses collaborations avec Israël, le Maroc et la Pologne, et les élargir à l'Ukraine avec T. Banack (Lviv), en renforçant l'aspect topologique.

Algèbres de Boole, *R. Bonnet, avec L. Faouzi et M. Rubin*. Nous utilisons, entre autres, la théorie des ensembles, pour étudier certaines algèbres de Boole. D'autre part, nous établissons des résultats concernant les algèbres sur un corps commutatif (fini), qui généralisent ceux obtenus par Bekkali et Zhani^[3].

[8] C. Dürr, I. Rapaport, and G. Theyssier. Cellular automata and communication complexity. *Theor. Comput. Sci.*, 322(2) :355–368, 2004.

[23] M. Pivato. Reallife : The continuum limit of larger than life cellular automata. *Theor. Comput. Sci.*, 372(1) :46–68, 2007.

[3] M. Bekkali and D. Zhani. *Set Theory*, chapter Upper semi-lattice algebras. Trends in Mathematics. Birkhäuser Verlag, 2006.

Topologie générale, *R. Bonnet, avec W. Kubiś et T. Banach*. La topologie générale relève maintenant plus de la dualité de Pontryagin pour les demi-treillis munis d'une structure d'espace Booléen (espace compact totalement discontinu), où l'espace possède une opération d'inf-demi-treillis continue, thème développé, en particulier, dans différents ouvrages de Hofmann, Mislove, Stralka et Scott de 1991 à 2003. Nous développons certaines propriétés de la fonction "mean" (qui est une opération idempotente et commutative sur un espace Booléen). Nous approfondissons aussi des résultats de Bekkali et Zhani^[3], en utilisant la convexité et la super-compacité.

Ensembles ordonnés, *R. Bonnet, avec U. Abraham, M. Dzamonja et W. Kubiś*. En prolongement de [3], nous essayons de montrer que tout wqo est réunion dénombrable de bqo.

4.3 Formation, diffusion, culture scientifique

Enseignement

L'équipe LIMD est à l'interface entre mathématiques et informatique et en tant que telle s'implique dans les deux départements. En particulier, J.-O. Lachaud a pris la direction du département d'informatique. Cela se traduit aussi par la création pour le prochain quadriennal d'un Master Recherche spécialité Informatique, parcours Fondements de l'Informatique : Conception et Validation, demandé en cohabilitation avec l'Université Joseph Fourier. Pour ce nouveau quadriennal, de nouveaux cours à l'interface des mathématiques et de l'informatique sont créés dans le master informatique à l'Université de Savoie. Les filières d'enseignement évoluent donc en parallèle du développement de l'équipe LIMD.

GDR Informatique Mathématique

LIMD confirme son implication au sein du GDR Informatique Mathématique (IM)^[13].

Le GDR IM comprend environ 1500 membres et rassemble des chercheurs travaillant sur des problématiques informatiques, dont la modélisation ou la résolution fait intervenir de manière essentielle les méthodes mathématiques.

Le GDR se décline en trois pôles :

- Algorithmique et combinatoire,
- Calcul formel, arithmétique, protection de l'information, géométrie,
- Logique et complexité.

Ces pôles sont ensuite divisés en groupes de travail relativement indépendants, qui se rencontrent périodiquement (<http://www.gdr-im.fr/?q=event/selectorgdr>).

Ces domaines sont variés scientifiquement et les chercheurs du GDR sont dispersés en France, tant géographiquement qu'administrativement (INSMI ou INST2I, CNRS ou INRIA, etc.). L'unité du GDR est matérialisée chaque année par deux points de rencontre communs aux trois pôles : les journées nationales et l'école jeunes chercheurs.

L'équipe LIMD est présente dans les trois pôles du GDR (et dans 6 des 15 groupes de travail) et démontre son implication en organisant l'édition 2010 de l'école jeunes chercheurs.

Diffusion et culture scientifique

L'implication de LIMD dans les actions à destination du grand public a été régulière ces dernières années et nous comptons continuer dans cette voie. Cela signifie en particulier que nous proposerons d'autres séances « amphis pour tous », ainsi que d'autres animations pour la fête de la science. Mais cela peut aussi concerner des projets de plus longue haleine, tels que l'animation de séances en école, par exemple sur le modèle de *Computer Science Unplugged*^[6] ou *pathways*^[22].

[3] M. Bekkali and D. Zhani. *Set Theory*, chapter Upper semi-lattice algebras. Trends in Mathematics. Birkhäuser Verlag, 2006.

[13] Gdr informatique mathématique. <http://http://www.gdr-im.fr/>.

[6] Computer science unplugged. <http://csunplugged.org>.

[22] Pathways. <http://www.math.hmc.edu/pathways>.

Bibliographie

- [1] E. Jeandel and Theyssier, Guillaume. Subshifts, Languages and Logic. In *Lecture Notes in Computer Science 13th International Conference on Developments in Language Theory*, page?, 06 2009.
- [2] B. Kerautret and Lachaud, Jacques-Olivier. Multiscale Analysis of Discrete Contours for Un-supervised Noise Detection. In *Proc. International Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA2009)*, Lecture Notes in Computer Science, page : to appear., Mexico Mexique, 2009. Springer.
- [3] Bonnet, Robert, U. Abraham, and W. Kubis. Free boolean algebras over well-quasi ordered sets. *Algebra Universalis*, 58(3) :263–286, 2008.
- [4] Raffalli, Christophe and Hyvernât, Pierre. PML (Proved ML). Langage de programmation en développement,<http://www.lama.univ-savoie.fr/tracpml>.