

Polygones convexes, segments maximaux et convergence d'estimateurs géométriques discrets

François de Vieilleville¹ Jacques-Olivier Lachaud¹ Fabien Feschet²

¹LaBRI - Université Bordeaux 1

²LLAIC - Université Clermont-Ferrand

GT ARITH - 16 mars 2006

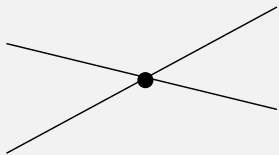
- 1 Contexte : géométries euclidienne et discrète
- 2 Droites discrètes et variantes
 - Segments de droite discrètes (DSS)
 - Segments maximaux (MS)
 - Polygones convexes discrets (CDP)
- 3 Etude segments maximaux sur polygone convexe discret
- 4 Propriétés asymptotiques des discrétisations de formes 3-convexes
- 5 Conséquences sur convergence d'estimateurs géométriques
- 6 Conclusions et perspectives

- 1 Contexte : géométries euclidienne et discrète
- 2 Droites discrètes et variantes
 - Segments de droite discrètes (DSS)
 - Segments maximaux (MS)
 - Polygones convexes discrets (CDP)
- 3 Etude segments maximaux sur polygone convexe discret
- 4 Propriétés asymptotiques des discrétisations de formes 3-convexes
- 5 Conséquences sur convergence d'estimateurs géométriques
- 6 Conclusions et perspectives

Géométrie euclidienne \neq géométrie discrète

Espace euclidien (\mathbb{R}^2)

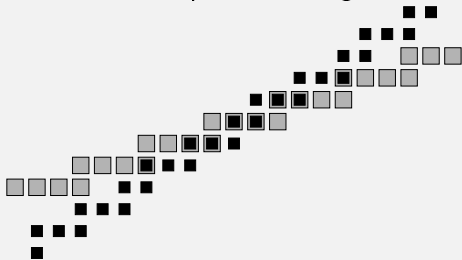
Omniprésent monde physique



intersection = point

Espace discret (\mathbb{Z}^2)

Naturel pour les images

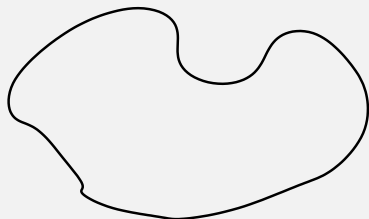


intersection = ??

- Approximation par des fonctions continues, puis géométrie euclidienne
- Ou **Géométrie discrète** : une primitive fondamentale, la **droite discrète**

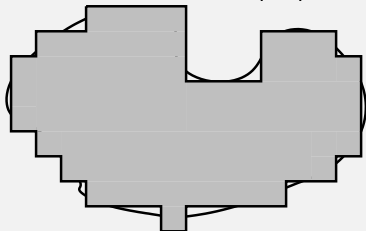
Géométrie euclidienne \neq géométrie discrète

Espace euclidien (\mathbb{R}^2)



calcul longueur, aire, tangente, courbure

Espace discret (\mathbb{Z}^2)



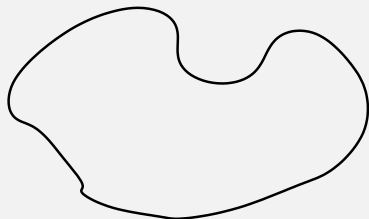
estimation de ces quantités ?

- Approximation par des fonctions continues, puis géométrie euclidienne

Ou **Géométrie discrète** : une primitive fondamentale, la **droite discrète**

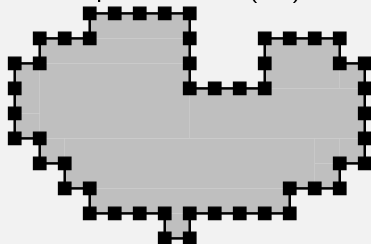
Géométrie euclidienne \neq géométrie discrète

Espace euclidien (\mathbb{R}^2)



calcul longueur, aire, tangente, courbure

Espace discret (\mathbb{Z}^2)



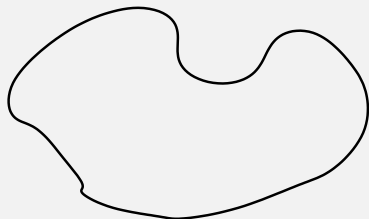
estimation de ces quantités ?

- Approximation par des fonctions continues, puis géométrie euclidienne

Ou **Géométrie discrète** : une primitive fondamentale, la **droite discrète**

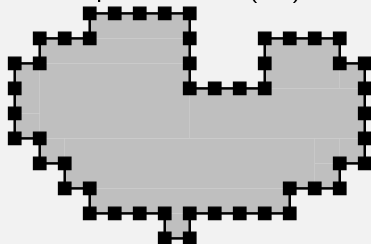
Géométrie euclidienne \neq géométrie discrète

Espace euclidien (\mathbb{R}^2)



calcul longueur, aire, tangente, courbure

Espace discret (\mathbb{Z}^2)



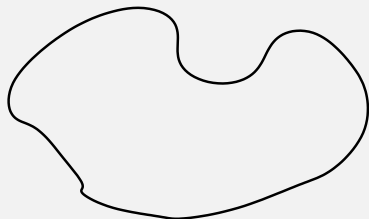
estimation de ces quantités ?

- Approximation par des fonctions continues, puis géométrie euclidienne

Ou **Géométrie discrète** : une primitive fondamentale, la **droite discrète**

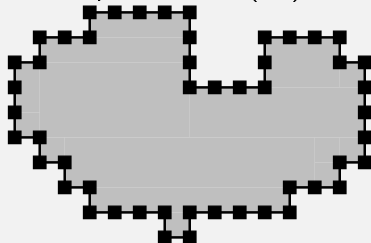
Géométrie euclidienne \neq géométrie discrète

Espace euclidien (\mathbb{R}^2)



calcul longueur, aire, tangente, courbure

Espace discret (\mathbb{Z}^2)

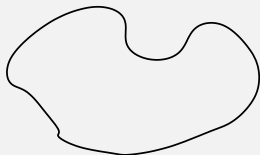


estimation de ces quantités ?

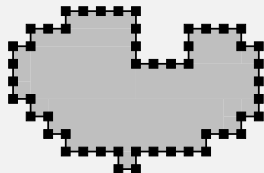
- Approximation par des fonctions continues, puis géométrie euclidienne

Ou **Géométrie discrète** : une primitive fondamentale, la **droite discrète**

- Objets d'intérêts : courbes discrètes de \mathbb{Z}^2



Discrétisation

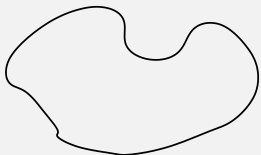


- Objectif : estimation de quantités géométriques (e.g. tangente, courbure)

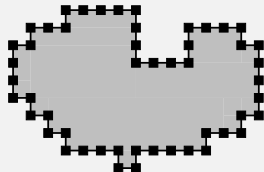
Convergence asymptotique

Ces estimations convergent vers la valeur euclidienne lorsque le pas de discrétisation est de plus en plus petit.

- Objets d'intérêts : courbes discrètes de \mathbb{Z}^2



Discrétisation

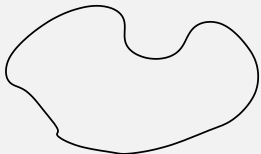


- Objectif : estimation de quantités géométriques (e.g. tangente, courbure)

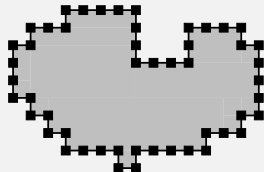
Convergence asymptotique

Ces estimations convergent vers la valeur euclidienne lorsque le pas de discrétisation est de plus en plus petit.

- Objets d'intérêts : courbes discrètes de \mathbb{Z}^2



Discrétisation



- Objectif : estimation de quantités géométriques (e.g. tangente, courbure)

Convergence asymptotique

Ces estimations convergent vers la valeur euclidienne lorsque le pas de discrétisation est de plus en plus petit.

Résultats connus de convergence asymptotique

Quantité	Forme de \mathbb{R}^2	technique	B. sup erreur	Ref
aire	C3-convexes	comptage	$O(h^{\frac{15}{11}+\epsilon})$	[Huxley90]
moments	C3-convexes	comptage	$O(h^{\frac{15}{11}+\epsilon})$	[Klette, Žunić00]
longueur	convexe	polygonalisation	$\approx 4.5h$	[Kovalevsky, Fuchs92]
longueur	convexe	“saucissonnage”	$\approx 5.844h$	[Klette et. al.8]
longueur	convexe	“Grid continuum”	$\approx 8h$	[Sloboda, Zlatko96]
longueur	convexe	\int normales	?	[Coeurjolly02]

① \Rightarrow Quantités géométriques globales

② Quantités géométriques locales? (tangentes, courbures)

- Courbes discrètes : \exists algos reconnaissance de segments de droite
- Discrétisation de droite de pente rationnelle : reconnue comme droite discrète de même pente
- Convergence asymptotique de la tangente sur droites de \mathbb{R}^2 .

Résultats connus de convergence asymptotique

Quantité	Forme de \mathbb{R}^2	technique	B. sup erreur	Ref
aire	C3-convexes	comptage	$O(h^{\frac{15}{11}+\epsilon})$	[Huxley90]
moments	C3-convexes	comptage	$O(h^{\frac{15}{11}+\epsilon})$	[Klette, Žunić00]
longueur	convexe	polygonalisation	$\approx 4.5h$	[Kovalevsky, Fuchs92]
longueur	convexe	“saucissonnage”	$\approx 5.844h$	[Klette et. al.8]
longueur	convexe	“Grid continuum”	$\approx 8h$	[Sloboda, Zlatko96]
longueur	convexe	\int normales	?	[Coeurjolly02]

1 \Rightarrow Quantités géométriques **globales**

2 Quantités géométriques **locales**? (tangentes, courbures)

- Courbes discrètes : \exists algos reconnaissance de segments de droite
- Discrétisation de droite de pente rationnelle : reconnue comme droite discrète de **même pente**
- Convergence asymptotique de la tangente sur droites de \mathbb{R}^2 .

Résultats connus de convergence asymptotique

Quantité	Forme de \mathbb{R}^2	technique	B. sup erreur	Ref
aire	C3-convexes	comptage	$O(h^{\frac{15}{11}+\epsilon})$	[Huxley90]
moments	C3-convexes	comptage	$O(h^{\frac{15}{11}+\epsilon})$	[Klette, Žunić00]
longueur	convexe	polygonalisation	$\approx 4.5h$	[Kovalevsky, Fuchs92]
longueur	convexe	“saucissonnage”	$\approx 5.844h$	[Klette et. al.8]
longueur	convexe	“Grid continuum”	$\approx 8h$	[Sloboda, Zlatko96]
longueur	convexe	\int normales	?	[Coeurjolly02]

① \Rightarrow Quantités géométriques **globales**

② Quantités géométriques **locales**? (tangentes, courbures)

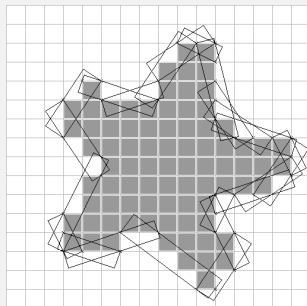
- Courbes discrètes : \exists algos reconnaissance de segments de droite
- Discrétisation de droite de pente rationnelle : reconnue comme droite discrète de **même pente**
- Convergence asymptotique de la tangente sur droites de \mathbb{R}^2 .

- Convergence asymptotique d'estimateurs géométriques locaux basés sur la reconnaissance de droite discrètes
- Exemples : tangente estimée
- Exemple : courbure estimée
- Premiers résultats [*Coeurjolly02*]
 - convergence tangentes par DSS si taille discrète des DSS tend vers $+\infty$ lorsque $h \rightarrow 0$.
 - convergence courbures si taille discrète des DSS grandit en $\Theta(\frac{1}{\sqrt{h}})$.

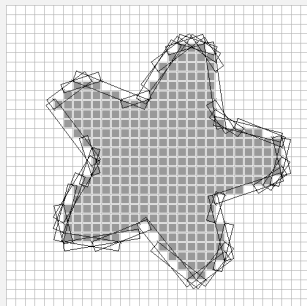
Problématique

Etude asymptotique des segments maximaux, en nombre et longueur

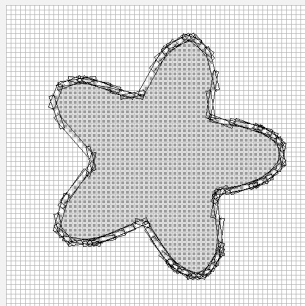
- Convergence asymptotique d'estimateurs géométriques locaux basés sur la reconnaissance de droite discrètes
- Exemples : tangente estimée
 - = plus grand segment discret symétrique [Vialard96]
 - = segment maximal centré [Feschet, Tougne99]
 - = combinaison convexe de segments maximaux couvrants [Lachaud, Vialard, de Vielleville03]



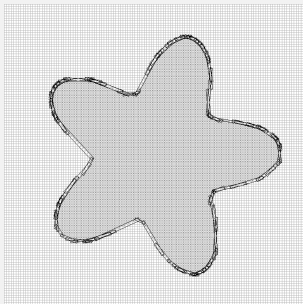
- Convergence asymptotique d'estimateurs géométriques locaux basés sur la reconnaissance de droite discrètes
- Exemples : tangente estimée
 - = plus grand segment discret symétrique [Vialard96]
 - = segment maximal centré [Feschet, Tougne99]
 - = combinaison convexe de segments maximaux couvrants [Lachaud, Vialard, de Vielleville03]



- Convergence asymptotique d'estimateurs géométriques locaux basés sur la reconnaissance de droite discrètes
- Exemples : tangente estimée
 - = plus grand segment discret symétrique [Vialard96]
 - = segment maximal centré [Feschet, Tougne99]
 - = combinaison convexe de segments maximaux couvrants [Lachaud, Vialard, de Vielleville03]



- Convergence asymptotique d'estimateurs géométriques locaux basés sur la reconnaissance de droite discrètes
- Exemples : tangente estimée
 - = plus grand segment discret symétrique [Vialard96]
 - = segment maximal centré [Feschet, Tougne99]
 - = combinaison convexe de segments maximaux couvrants [Lachaud, Vialard, de Vielleville03]



- Convergence asymptotique d'estimateurs géométriques locaux basés sur la reconnaissance de droite discrètes
- Exemples : tangente estimée
- Exemple : courbure estimée
 - = inverse du rayon du cercle circonscris aux extrémités des demi-segments discrets
- Premiers résultats [*Coeurjolly02*]
 - convergence tangentes par DSS si taille discrète des DSS tend vers $+\infty$ lorsque $h \rightarrow 0$.
 - convergence courbures si taille discrète des DSS grandit en $\Theta(\frac{1}{\sqrt{h}})$.

Problématique

Étude asymptotique des segments maximaux, en nombre et longueur

- Convergence asymptotique d'estimateurs géométriques locaux basés sur la reconnaissance de droite discrètes
- Exemples : tangente estimée
- Exemple : courbure estimée
- Premiers résultats [*Coeurjolly02*]
 - convergence tangentes par DSS si taille discrète des DSS tend vers $+\infty$ lorsque $h \rightarrow 0$.
 - convergence courbures si taille discrète des DSS grandit en $\Theta(\frac{1}{\sqrt{h}})$.

Problématique

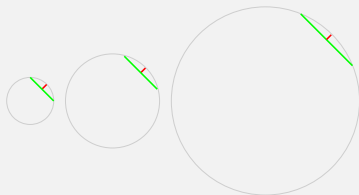
Etude asymptotique des segments maximaux, en nombre et longueur

- Convergence asymptotique d'estimateurs géométriques locaux basés sur la reconnaissance de droite discrètes
- Exemples : tangente estimée
- Exemple : courbure estimée
- Premiers résultats [*Coeurjolly02*]
 - convergence tangentes par DSS si taille discrète des DSS tend vers $+\infty$ lorsque $h \rightarrow 0$.
 - convergence courbures si taille discrète des DSS grandit en $\Theta(\frac{1}{\sqrt{h}})$.

Problématique

Etude asymptotique des segments maximaux, en nombre et longueur

- convergence tangentes par DSS si taille discrète des DSS tend vers $+\infty$ lorsque $h \rightarrow 0$?
Faux autour de certains points, tangentes symétriques [Lachaud04]
Vrai tangentes basées segments maximaux [Lachaud,deVieilleville,Vialard]
- convergence courbures si taille discrète des DSS grandit en $\Theta(\frac{1}{\sqrt{h}})$?

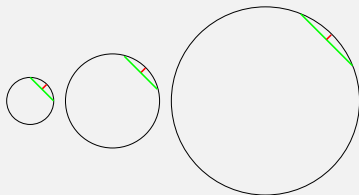


Hyp. raisonnable : taux d'accroissement des cordes sur cercle

Faux [deVieilleville,Lachaud,Feschet04]

- ① plus petit segment maximal ne peut grandir plus vite que $\Theta(\frac{1}{\sqrt{r}})$
- ② longueur moyenne des segments maximaux grandit en $\Theta(\frac{1}{\sqrt{r}})$

- convergence tangentes par DSS si taille discrète des DSS tend vers $+\infty$ lorsque $h \rightarrow 0$?
Faux autour de certains points, tangentes symétriques [Lachaud04]
Vrai tangentes basées segments maximaux [Lachaud,deVieilleville,Vialard]
- convergence courbures si taille discrète des DSS grandit en $\Theta(\frac{1}{\sqrt{h}})$?

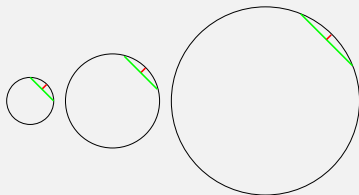


Hyp. raisonnable : taux d'accroissement des cordes sur cercle

Faux [deVieilleville,Lachaud,Feschet04]

- 1 plus petit segment maximal ne peut grandir plus vite que $\Theta(\frac{1}{h^{1/3}})$
- 2 longueur moyenne des segments maximaux grandit en $\Theta(\frac{1}{h^{1/3}})$

- convergence tangentes par DSS si taille discrète des DSS tend vers $+\infty$ lorsque $h \rightarrow 0$?
Faux autour de certains points, tangentes symétriques [Lachaud04]
Vrai tangentes basées segments maximaux [Lachaud,deVieilleville,Vialard]
- convergence courbures si taille discrète des DSS grandit en $\Theta(\frac{1}{\sqrt{h}})$?

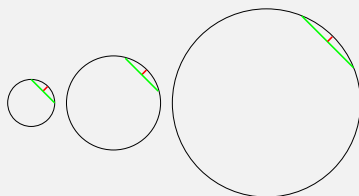


Hyp. raisonnable : taux d'accroissement des cordes sur cercle

Faux [deVieilleville,Lachaud,Feschet04]

- 1 plus petit segment maximal ne peut grandir plus vite que $\Theta(\frac{1}{h^{1/3}})$
- 2 longueur moyenne des segments maximaux grandit en $\Theta(\frac{1}{h^{1/3}})$

- convergence tangentes par DSS si taille discrète des DSS tend vers $+\infty$ lorsque $h \rightarrow 0$?
Faux autour de certains points, tangentes symétriques [Lachaud04]
Vrai tangentes basées segments maximaux [Lachaud,deVieilleville,Vialard]
- convergence courbures si taille discrète des DSS grandit en $\Theta(\frac{1}{\sqrt{h}})$?

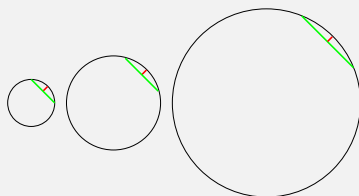


Hyp. raisonnable : taux d'accroissement des cordes sur cercle

Faux [deVieilleville,Lachaud,Feschet04]

- 1 plus petit segment maximal ne peut grandir plus vite que $\Theta(\frac{1}{h^{1/3}})$
- 2 longueur moyenne des segments maximaux grandit en $\Theta(\frac{1}{h^{1/3}})$

- convergence tangentes par DSS si taille discrète des DSS tend vers $+\infty$ lorsque $h \rightarrow 0$?
Faux autour de certains points, tangentes symétriques [Lachaud04]
Vrai tangentes basées segments maximaux [Lachaud,deVieilleville,Vialard]
- convergence courbures si taille discrète des DSS grandit en $\Theta(\frac{1}{\sqrt{h}})$?



Hyp. raisonnable : taux d'accroissement des cordes sur cercle

Faux [deVieilleville,Lachaud,Feschet04]

- 1 plus petit segment maximal ne peut grandir plus vite que $\Theta(\frac{1}{h^{1/3}})$
- 2 longueur moyenne des segments maximaux grandit en $\Theta(\frac{1}{h^{1/3}})$

Théorème

Si $m = \frac{1}{h}$ et $\Gamma(m)$ les discrétisations de plus en plus fines d'une forme 3-convexe Γ , alors longueur discrète moyenne des segments maximaux vérifie

$$\Theta(m^{\frac{1}{3}}) \leq \overline{\mathcal{L}^1(MS)(\Gamma(m))} \leq \Theta(m^{\frac{1}{3}} \log(m))$$

- 1 Segments de droites discrètes, mots de droites (*patterns*), segments maximaux, polygone convexe discret
- 2 Etude des segments maximaux sur un polygone convexe discret
- 3 Nombre et longueur segments maximaux par rapport à nombre et longueur arêtes polygone convexe discret
- 4 Propriétés asymptotiques des discrétisations de formes 3-convexes
[Balog, Bárány91]
- 5 Longueur moyenne asymptotique des MS et invalidation de la preuve convergence courbure = question ouverte

Théorème

Si $m = \frac{1}{h}$ et $\Gamma(m)$ les discrétisations de plus en plus fines d'une forme 3-convexe Γ , alors longueur discrète moyenne des segments maximaux vérifie

$$\Theta(m^{\frac{1}{3}}) \leq \overline{\mathcal{L}^1(MS)(\Gamma(m))} \leq \Theta(m^{\frac{1}{3}} \log(m))$$

- 1 Segments de droites discrètes, mots de droites (*patterns*), segments maximaux, polygone convexe discret
- 2 Etude des segments maximaux sur un polygone convexe discret
- 3 Nombre et longueur segments maximaux par rapport à nombre et longueur arêtes polygone convexe discret
- 4 Propriétés asymptotiques des discrétisations de formes 3-convexes
[Balog, Bárány91]
- 5 Longueur moyenne asymptotique des MS et invalidation de la preuve convergence courbure = question ouverte

Théorème

Si $m = \frac{1}{h}$ et $\Gamma(m)$ les discrétisations de plus en plus fines d'une forme 3-convexe Γ , alors longueur discrète moyenne des segments maximaux vérifie

$$\Theta(m^{\frac{1}{3}}) \leq \overline{\mathcal{L}^1(MS)(\Gamma(m))} \leq \Theta(m^{\frac{1}{3}} \log(m))$$

- 1 Segments de droites discrètes, mots de droites (*patterns*), segments maximaux, polygone convexe discret
- 2 Etude des segments maximaux sur un polygone convexe discret
- 3 Nombre et longueur segments maximaux par rapport à nombre et longueur arêtes polygone convexe discret
- 4 Propriétés asymptotiques des discrétisations de formes 3-convexes
[Balog, Bárány91]
- 5 Longueur moyenne asymptotique des MS et invalidation de la preuve convergence courbure = question ouverte

Théorème

Si $m = \frac{1}{h}$ et $\Gamma(m)$ les discrétisations de plus en plus fines d'une forme 3-convexe Γ , alors longueur discrète moyenne des segments maximaux vérifie

$$\Theta(m^{\frac{1}{3}}) \leq \overline{\mathcal{L}^1(MS)(\Gamma(m))} \leq \Theta(m^{\frac{1}{3}} \log(m))$$

- 1 Segments de droites discrètes, mots de droites (*patterns*), segments maximaux, polygone convexe discret
- 2 Etude des segments maximaux sur un polygone convexe discret
- 3 Nombre et longueur segments maximaux par rapport à nombre et longueur arêtes polygone convexe discret
- 4 Propriétés asymptotiques des discrétisations de formes 3-convexes
[Balog, Bárány91]
- 5 Longueur moyenne asymptotique des MS et invalidation de la preuve convergence courbure = question ouverte

Théorème

Si $m = \frac{1}{h}$ et $\Gamma(m)$ les discrétisations de plus en plus fines d'une forme 3-convexe Γ , alors longueur discrète moyenne des segments maximaux vérifie

$$\Theta(m^{\frac{1}{3}}) \leq \overline{\mathcal{L}^1(MS)(\Gamma(m))} \leq \Theta(m^{\frac{1}{3}} \log(m))$$

- 1 Segments de droites discrètes, mots de droites (*patterns*), segments maximaux, polygone convexe discret
- 2 Etude des segments maximaux sur un polygone convexe discret
- 3 Nombre et longueur segments maximaux par rapport à nombre et longueur arêtes polygone convexe discret
- 4 Propriétés asymptotiques des discrétisations de formes 3-convexes
[\[Balog, Bárány91\]](#)
- 5 Longueur moyenne asymptotique des MS et invalidation de la preuve convergence courbure = question ouverte

Théorème

Si $m = \frac{1}{h}$ et $\Gamma(m)$ les discrétisations de plus en plus fines d'une forme 3-convexe Γ , alors longueur discrète moyenne des segments maximaux vérifie

$$\Theta(m^{\frac{1}{3}}) \leq \overline{\mathcal{L}^1(MS)(\Gamma(m))} \leq \Theta(m^{\frac{1}{3}} \log(m))$$

- 1 Segments de droites discrètes, mots de droites (*patterns*), segments maximaux, polygone convexe discret
- 2 Etude des segments maximaux sur un polygone convexe discret
- 3 Nombre et longueur segments maximaux par rapport à nombre et longueur arêtes polygone convexe discret
- 4 Propriétés asymptotiques des discrétisations de formes 3-convexes
[\[Balog, Bárány91\]](#)
- 5 Longueur moyenne asymptotique des MS et invalidation de la preuve convergence courbure = question ouverte

- 1 Contexte : géométries euclidienne et discrète
- 2 Droites discrètes et variantes
 - Segments de droite discrètes (DSS)
 - Segments maximaux (MS)
 - Polygones convexes discrets (CDP)
- 3 Etude segments maximaux sur polygone convexe discret
- 4 Propriétés asymptotiques des discrétisations de formes 3-convexes
- 5 Conséquences sur convergence d'estimateurs géométriques
- 6 Conclusions et perspectives

Segments de droites discrètes (DSS) :

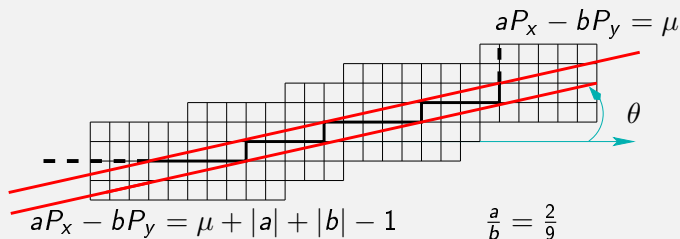
Approche arithmétique due à [\[Revelles91\]](#)

Definition

Un ensemble fini de points 4-connexes sur la grille discrète \mathbb{Z}^2 est un segment de droite discrète (DSS) ssi $\exists(a, b, \mu)$ ssi :

$$(\forall P \in \mathbb{Z}^2) \quad \mu \leq aP_x - bP_y < \mu + |a| + |b|$$

NB : (a, b) minimaux = caractéristiques du segment



Segments de droites discrètes (DSS) :

Approche arithmétique due à [\[Reveilles91\]](#)

Definition

Un ensemble fini de points 4-connexes sur la grille discrète \mathbb{Z}^2 est un segment de droite discrète (DSS) ssi $\exists(a, b, \mu)$ ssi :

$$(\forall P \in \mathbb{Z}^2) \quad \mu \leq aP_x - bP_y < \mu + |a| + |b|$$

NB : (a, b) minimaux = caractéristiques du segment

- 1 Les caractéristiques des DSS peuvent être extraites par des algorithmes linéaires incrémentaux [\[Debled-Renesson, Réveilles95\]](#)
 - 2 Plusieurs DSS peuvent être définis autour d'un point
 - 3 Tangente discrète : définition particulière de DSS
sa direction définit la direction de l'estimation estimée.
- ⇒ Plusieurs définitions possibles de tangentes.

Segments de droites discrètes (DSS) :

Approche arithmétique due à [\[Reveilles91\]](#)

Definition

Un ensemble fini de points 4-connexes sur la grille discrète \mathbb{Z}^2 est un segment de droite discrète (DSS) ssi $\exists(a, b, \mu)$ ssi :

$$(\forall P \in \mathbb{Z}^2) \quad \mu \leq aP_x - bP_y < \mu + |a| + |b|$$

NB : (a, b) minimaux = caractéristiques du segment

- 1 Les caractéristiques des DSS peuvent être extraites par des algorithmes linéaires incrémentaux [\[Debled-Renesson, Réveilles95\]](#)
 - 2 Plusieurs DSS peuvent être définis autour d'un point
 - 3 Tangente discrète : définition particulière de DSS
sa direction définit la direction de l'estimation estimée.
- ⇒ Plusieurs définitions possibles de tangentes.

Segments de droites discrètes (DSS) :

Approche arithmétique due à [\[Reveilles91\]](#)

Definition

Un ensemble fini de points 4-connexes sur la grille discrète \mathbb{Z}^2 est un segment de droite discrète (DSS) ssi $\exists(a, b, \mu)$ ssi :

$$(\forall P \in \mathbb{Z}^2) \quad \mu \leq aP_x - bP_y < \mu + |a| + |b|$$

NB : (a, b) minimaux = caractéristiques du segment

- 1 Les caractéristiques des DSS peuvent être extraites par des algorithmes linéaires incrémentaux [\[Debled-Renesson, Réveilles95\]](#)
- 2 Plusieurs DSS peuvent être définis autour d'un point
- 3 Tangente discrète : définition particulière de DSS sa direction définit la direction de l'estimation estimée.

⇒ Plusieurs définitions possibles de tangentes.

Segments de droites discrètes (DSS) :

Approche arithmétique due à [\[Reveilles91\]](#)

Definition

Un ensemble fini de points 4-connexes sur la grille discrète \mathbb{Z}^2 est un segment de droite discrète (DSS) ssi $\exists(a, b, \mu)$ ssi :

$$(\forall P \in \mathbb{Z}^2) \quad \mu \leq aP_x - bP_y < \mu + |a| + |b|$$

NB : (a, b) minimaux = caractéristiques du segment

- 1 Les caractéristiques des DSS peuvent être extraites par des algorithmes linéaires incrémentaux [\[Debled-Renesson, Réveilles95\]](#)
 - 2 Plusieurs DSS peuvent être définis autour d'un point
 - 3 Tangente discrète : définition particulière de DSS sa direction définit la direction de l'estimation estimée.
- ⇒ Plusieurs définitions possibles de tangentes.

Segments de droites discrètes (DSS) :

Approche combinatoire due à [Berstel97]

- ① **pattern** = plus petit mot de Freeman représentant le chemin discret de pente z

$$z = \frac{p}{q} = 0 + \frac{1}{u_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{u_{n-1} + \frac{1}{u_n}}}}$$

$$E(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad E(z_1) = 0^{u_1 1}$$

$$E(z_{2i+1}) = E(z_{2i})^{u_{2i+1}} E(z_{2i-1})$$

$$E(z_{2i}) = E(z_{2i-2}) E(z_{2i-1})^{u_{2i}}$$

0 : pas à droite

1 : pas en haut

- Définition récursive par rapport à la profondeur de la fraction continue de la pente.
- **pattern** de pente $p \equiv$ plus petit chemin discret de pente p .

Segments de droites discrètes (DSS) :

Approche combinatoire due à [Berstel97]

- ① **pattern** = plus petit mot de Freeman représentant le chemin discret de pente z

$$z = \frac{p}{q} = 0 + \frac{1}{u_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{u_{n-1} + \frac{1}{u_n}}}}$$

$$E(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad E(z_1) = 0^{u_1 1}$$

$$E(z_{2i+1}) = E(z_{2i})^{u_{2i+1}} E(z_{2i-1})$$

$$E(z_{2i}) = E(z_{2i-2}) E(z_{2i-1})^{u_{2i}}$$

0 : pas à droite

1 : pas en haut

- Définition récursive par rapport à la profondeur de la fraction continue de la pente.
- **pattern** de pente $p \equiv$ plus petit chemin discret de pente p .

Segments de droites discrètes (DSS) :

Approche combinatoire due à [Berstel97]

- ① **pattern** = plus petit mot de Freeman représentant le chemin discret de pente z

$$z = \frac{p}{q} = 0 + \frac{1}{u_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{u_{n-1} + \frac{1}{u_n}}}}$$

$$E(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad E(z_1) = 0^{u_1} 1$$

$$E(z_{2i+1}) = E(z_{2i})^{u_{2i+1}} E(z_{2i-1})$$

$$E(z_{2i}) = E(z_{2i-2}) E(z_{2i-1})^{u_{2i}}$$

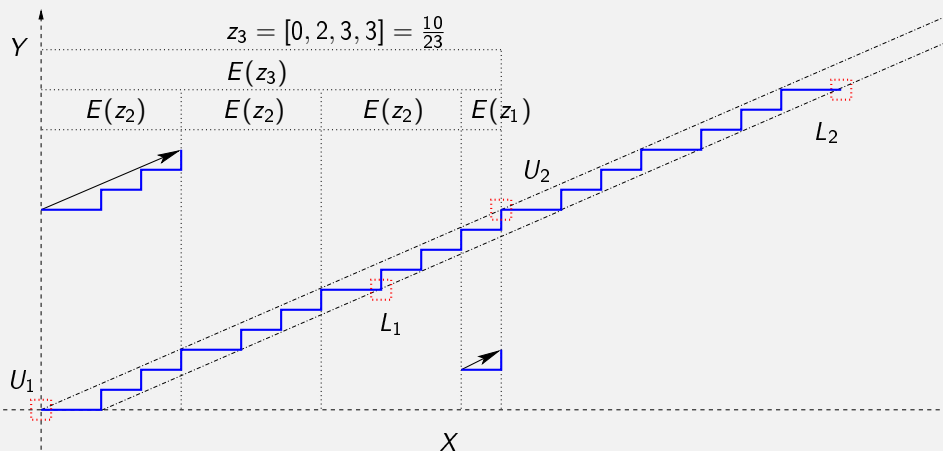
0 : pas à droite

1 : pas en haut

- Définition récursive par rapport à la profondeur de la fraction continue de la pente.
- **pattern** de pente $p \equiv$ plus petit chemin discret de pente p .

Segments de droites discrètes :

chemin $U_1 U_2 = \text{pattern}$, chemin $L_1 L_2 = \text{pattern inversé}$,



Expression de certaines propriétés :

- U_1L_1 et L_1U_2 , nombre de pas entre deux points d'appuis.
- Expressions de facteurs gauche et droit, propriétés sur les réduites.
- Dépendent de la parité de la profondeur de la pente.
- S'expriment en fonction des coefficients de la fraction continue.

Expression d'autres types de relation sur les DSS, complémentaire de la vision arithmétique.

Exemple de propriété

Si pattern impair $E(z'_{2p+1})$ de pente $z'_{2p+1} = [0, u'_1, \dots, u'_{2p+1}]$ facteur droit de $E(z_k)$ de pente $z_k = [0, u_1, \dots, u_k]$, alors

$$z'_{2p} = z_{2p} \text{ et } u'_{2p+1} \leq u_{2p+1}$$

Expression de certaines propriétés :

- U_1L_1 et L_1U_2 , nombre de pas entre deux points d'appuis.
- Expressions de facteurs gauche et droit, propriétés sur les réduites.
- Dépendent de la parité de la profondeur de la pente.
- S'expriment en fonction des coefficients de la fraction continue.

Expression d'autres types de relation sur les DSS, complémentaire de la vision arithmétique.

Exemple de propriété

Si pattern impair $E(z'_{2p+1})$ de pente $z'_{2p+1} = [0, u'_1, \dots, u'_{2p+1}]$ facteur droit de $E(z_k)$ de pente $z_k = [0, u_1, \dots, u_k]$, alors

$$z'_{2p} = z_{2p} \text{ et } u'_{2p+1} \leq u_{2p+1}$$

Expression de certaines propriétés :

- U_1L_1 et L_1U_2 , nombre de pas entre deux points d'appuis.
- Expressions de facteurs gauche et droit, propriétés sur les réduites.
- Dépendent de la parité de la profondeur de la pente.
- S'expriment en fonction des coefficients de la fraction continue.

Expression d'autres types de relation sur les DSS, complémentaire de la vision arithmétique.

Exemple de propriété

Si pattern impair $E(z'_{2p+1})$ de pente $z'_{2p+1} = [0, u'_1, \dots, u'_{2p+1}]$ facteur droit de $E(z_k)$ de pente $z_k = [0, u_1, \dots, u_k]$, alors

$$z'_{2p} = z_{2p} \text{ et } u'_{2p+1} \leq u_{2p+1}$$

Expression de certaines propriétés :

- U_1L_1 et L_1U_2 , nombre de pas entre deux points d'appuis.
- Dépendent de la parité de la profondeur de la pente.
- Expressions de facteurs gauche et droit, propriétés sur les réduites.
- S'expriment en fonction des coefficients de la fraction continue.

Expression d'autres types de relation sur les DSS, complémentaire de la vision arithmétique.

Exemple de propriété

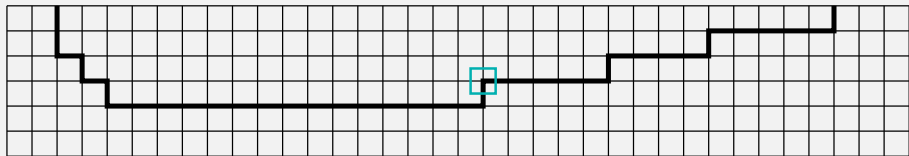
Si pattern impair $E(z'_{2p+1})$ de pente $z'_{2p+1} = [0, u'_1, \dots, u'_{2p+1}]$ facteur droit de $E(z_k)$ de pente $z_k = [0, u_1, \dots, u_k]$, alors

$$z'_{2p} = z_{2p} \text{ et } u'_{2p+1} \leq u_{2p+1}$$

Segments maximaux (MS)

Definition

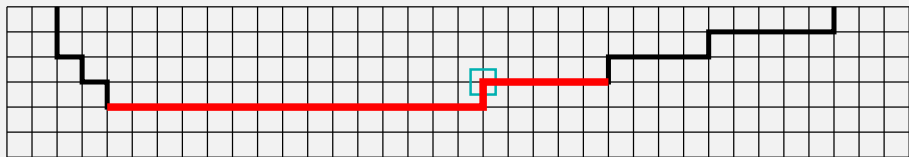
Un **segment maximal** sur une courbe discrète est un DSS qui ne peut pas être étendu à gauche ou à droite et rester encore un DSS.



Segments maximaux (MS)

Definition

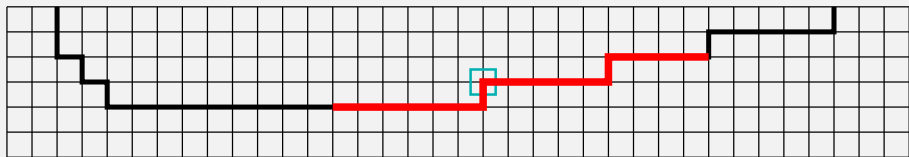
Un **segment maximal** sur une courbe discrète est un DSS qui ne peut pas être étendu à gauche ou à droite et rester encore un DSS.



Segments maximaux (MS)

Definition

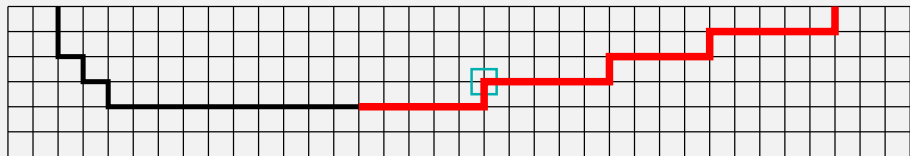
Un **segment maximal** sur une courbe discrète est un DSS qui ne peut pas être étendu à gauche ou à droite et rester encore un DSS.



Segments maximaux (MS)

Definition

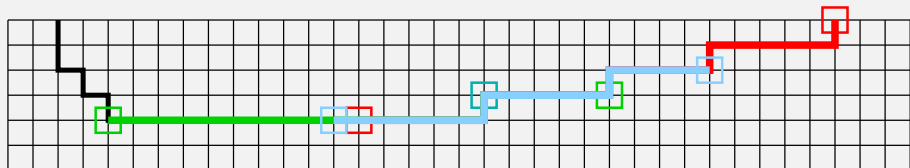
Un **segment maximal** sur une courbe discrète est un DSS qui ne peut pas être étendu à gauche ou à droite et rester encore un DSS.



Segments maximaux (MS)

Definition

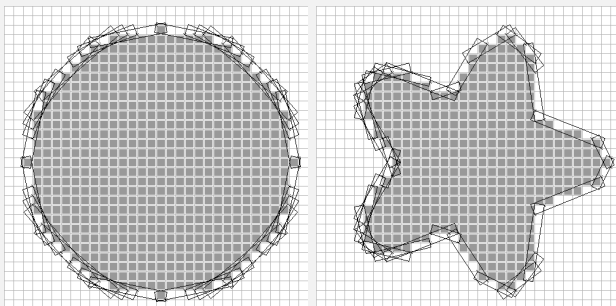
Un **segment maximal** sur une courbe discrète est un DSS qui ne peut pas être étendu à gauche ou à droite et rester encore un DSS.



Definition

Un **segment maximal** sur une courbe discrète est un DSS qui ne peut pas être étendu à gauche ou à droite et rester encore un DSS.

Les segments maximaux couvrent la courbe discrète.



Polygones convexes discrets (CDP)

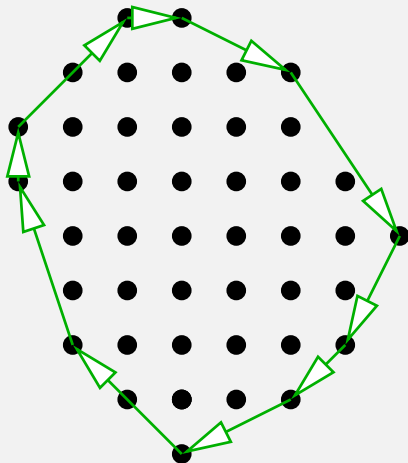
Definition

Un polygone convexe discret (CDP) Γ est un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 égal à la discrétisation de son enveloppe convexe.

Sommets $(V_i)_{i=1..e} =$ plus petit sous-ensemble vérifiant

$$\Gamma = \mathcal{D}_1(\text{conv}(V_1, \dots, V_e)).$$

- Points du bord de Γ 4-connexes par quadrants
- $n_e(\Gamma) =$ nb de sommets de Γ
- $\text{Per}(\Gamma) =$ périmètre de Γ



Polygones convexes discrets (CDP)

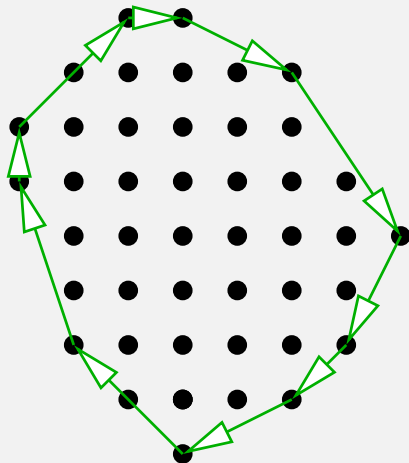
Definition

Un polygone convexe discret (CDP) Γ est un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 égal à la discrétisation de son enveloppe convexe.

Sommets $(V_i)_{i=1..e} =$ plus petit sous-ensemble vérifiant

$$\Gamma = \mathcal{D}_1(\text{conv}(V_1, \dots, V_e)).$$

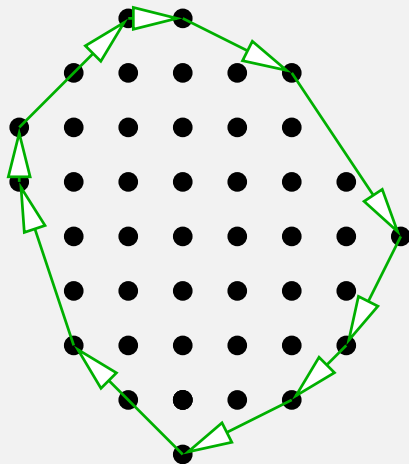
- Points du bord de Γ 4-connexes par quadrants
- $n_e(\Gamma) =$ nb de sommets de Γ
- $\text{Per}(\Gamma) =$ périmètre de Γ



- 1 Contexte : géométries euclidienne et discrète
- 2 Droites discrètes et variantes
 - Segments de droite discrètes (DSS)
 - Segments maximaux (MS)
 - Polygones convexes discrets (CDP)
- 3 Etude segments maximaux sur polygone convexe discret
- 4 Propriétés asymptotiques des discrétisations de formes 3-convexes
- 5 Conséquences sur convergence d'estimateurs géométriques
- 6 Conclusions et perspectives

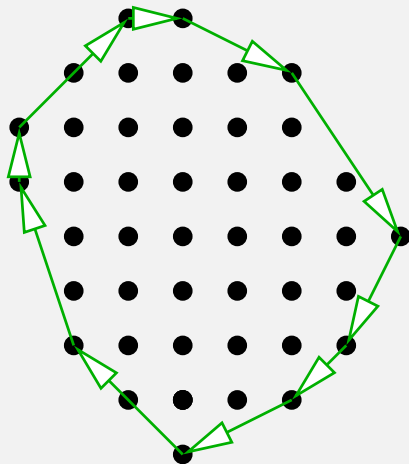
Position des segments maximaux sur un polygone convexe discret

- Les arêtes discrètes sont des patterns \Rightarrow elle ne contiennent pas de segment maximal (MS)
- Point d'appui sup MS = Sommet CDP
- Par **convexité**, 2 placements pour MS
 - lié à une arête de même pente (edge-supported)
 - lié à un sommet du CDP (vertex-supported)



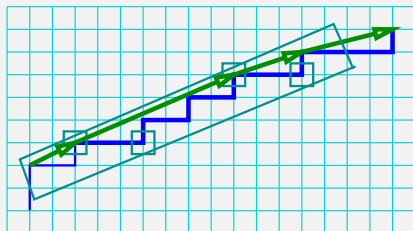
Position des segments maximaux sur un polygone convexe discret

- Les arêtes discrètes sont des patterns \Rightarrow elle ne contiennent pas de segment maximal (MS)
- Point d'appui sup MS = Sommet CDP
- Par **convexité**, 2 placements pour MS
 - lié à une arête de même pente (edge-supported)
 - lié à un sommet du CDP (vertex-supported)



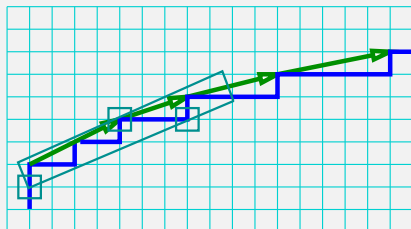
Position des segments maximaux sur un polygone convexe discret

- Les arêtes discrètes sont des patterns \Rightarrow elle ne contiennent pas de segment maximal (MS)
- Point d'appui sup MS = Sommet CDP
- Par **convexité**, 2 placements pour MS
 - lié à une arête de même pente (edge-supported)
 - lié à un sommet du CDP (vertex-supported)



Position des segments maximaux sur un polygone convexe discret

- Les arêtes discrètes sont des patterns \Rightarrow elle ne contiennent pas de segment maximal (MS)
- Point d'appui sup MS = Sommet CDP
- Par **convexité**, 2 placements pour MS
 - lié à une arête de même pente (edge-supported)
 - lié à un sommet du CDP (vertex-supported)



Nombre maximal de segments maximaux sur un polygone convexe discret

- MS “vertex-supported” : pas plus de 2 par sommet : un seul de pente impaire, un seul de pente paire (au maximum).
- MS “edge-supported” : chacun d’eux est lié à une arête.
- Nombre de MS = # “vertex supported” + # “edge supported”
- En conséquence :

$$\begin{aligned} n_{MS} &= \underbrace{n_{ULU}}_{\leq n_e} + \underbrace{n_{LUL}^{pair}}_{\leq n_e} + \underbrace{n_{LUL}^{impair}}_{\leq n_e} \\ &\leq 3n_e \end{aligned}$$

Theorem (Borne sup. nombre)

Nb de segments maximaux sur un CDP inférieur ou égal à 3 fois son nombre d’arêtes/sommets.

Nombre maximal de segments maximaux sur un polygone convexe discret

- MS “vertex-supported” : pas plus de 2 par sommet : un seul de pente impaire, un seul de pente paire (au maximum).
 - ① points d'appui inférieur différents ($L_2 < L'_2$)
 - ② inclusion de patterns ($[UL'_2] = [UL_2]r'$), réduite commune, calcul de la position de L'_1 et de L_1
 - ③ $L'_1 \leq L_1 < U < L_2 < L'_2 \Rightarrow$ contradiction
- MS “edge-supported” : chacun d'eux est lié à une arête.
- Nombre de MS = # “vertex supported” + # “edge supported”
- En conséquence :

$$\begin{aligned}n_{MS} &= \underbrace{n_{ULU}}_{\leq n_e} + \underbrace{n_{LUL}^{pair}}_{\leq n_e} + \underbrace{n_{LUL}^{impair}}_{\leq n_e} \\ &\leq 3n_e\end{aligned}$$

Theorem (Borne sup. nombre)

Nombre maximal de segments maximaux sur un polygone convexe discret

- MS “vertex-supported” : pas plus de 2 par sommet : un seul de pente impaire, un seul de pente paire (au maximum).
 - 1 points d'appui inférieur différents ($L_2 < L'_2$)
 - 2 inclusion de patterns ($[UL'_2] = [UL_2]r'$), réduite commune, calcul de la position de L'_1 et de L_1
 - 3 $L'_1 \leq L_1 < U < L_2 < L'_2 \Rightarrow$ contradiction
- MS “edge-supported” : chacun d'eux est lié à une arête.
- Nombre de MS = # “vertex supported” + # “edge supported”
- En conséquence :

$$\begin{aligned} n_{MS} &= \underbrace{n_{ULU}}_{\leq n_e} + \underbrace{n_{LUL}^{pair}}_{\leq n_e} + \underbrace{n_{LUL}^{impair}}_{\leq n_e} \\ &\leq 3n_e \end{aligned}$$

Theorem (Borne sup. nombre)

Nombre maximal de segments maximaux sur un polygone convexe discret

- MS “vertex-supported” : pas plus de 2 par sommet : un seul de pente impaire, un seul de pente paire (au maximum).
 - 1 points d'appui inférieur différents ($L_2 < L'_2$)
 - 2 inclusion de patterns ($[UL'_2] = [UL_2]r'$), réduite commune, calcul de la position de L'_1 et de L_1
 - 3 $L'_1 \leq L_1 < U < L_2 < L'_2 \Rightarrow$ contradiction
- MS “edge-supported” : chacun d'eux est lié à une arête.
- Nombre de MS = # “vertex supported” + # “edge supported”
- En conséquence :

$$\begin{aligned} n_{MS} &= \underbrace{n_{ULU}}_{\leq n_e} + \underbrace{n_{LUL}^{pair}}_{\leq n_e} + \underbrace{n_{LUL}^{impair}}_{\leq n_e} \\ &\leq 3n_e \end{aligned}$$

Theorem (Borne sup. nombre)

Nombre maximal de segments maximaux sur un polygone convexe discret

- MS “vertex-supported” : pas plus de 2 par sommet : un seul de pente impaire, un seul de pente paire (au maximum).
- MS “edge-supported” : chacun d’eux est lié à une arête.
- Nombre de MS = # “vertex supported” + # “edge supported”
- En conséquence :

$$\begin{aligned}n_{MS} &= \underbrace{n_{ULU}}_{\leq n_e} + \underbrace{n_{LUL}^{pair}}_{\leq n_e} + \underbrace{n_{LUL}^{impair}}_{\leq n_e} \\ &\leq 3n_e\end{aligned}$$

Theorem (Borne sup. nombre)

Nb de segments maximaux sur un CDP inférieur ou égal à 3 fois son nombre d’arêtes/sommets.

Nombre maximal de segments maximaux sur un polygone convexe discret

- MS “vertex-supported” : pas plus de 2 par sommet : un seul de pente impaire, un seul de pente paire (au maximum).
- MS “edge-supported” : chacun d’eux est lié à une arête.
- Nombre de MS = # “vertex supported” + # “edge supported”
- En conséquence :

$$\begin{aligned} n_{MS} &= \underbrace{n_{ULU}}_{\leq n_e} + \underbrace{n_{LUL}^{pair}}_{\leq n_e} + \underbrace{n_{LUL}^{impair}}_{\leq n_e} \\ &\leq 3n_e \end{aligned}$$

Theorem (Borne sup. nombre)

Nb de segments maximaux sur un CDP inférieur ou égal à 3 fois son nombre d’arêtes/sommets.

Nombre maximal de segments maximaux sur un polygone convexe discret

- MS “vertex-supported” : pas plus de 2 par sommet : un seul de pente impaire, un seul de pente paire (au maximum).
- MS “edge-supported” : chacun d’eux est lié à une arête.
- Nombre de MS = # “vertex supported” + # “edge supported”
- En conséquence :

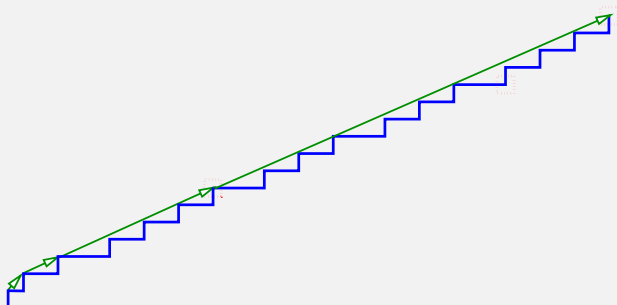
$$\begin{aligned}n_{MS} &= \underbrace{n_{ULU}}_{\leq n_e} + \underbrace{n_{LUL}^{pair}}_{\leq n_e} + \underbrace{n_{LUL}^{impair}}_{\leq n_e} \\ &\leq 3n_e\end{aligned}$$

Theorem (Borne sup. nombre)

Nb de segments maximaux sur un CDP inférieur ou égal à 3 fois son nombre d’arêtes/sommets.

Nombre d'arêtes absorbé par un MS

- 1 Cas des segments maximaux "edge-supported" : $z = [0, u_1, \dots, u_n]$, au maximum, $2n+1$ arêtes.

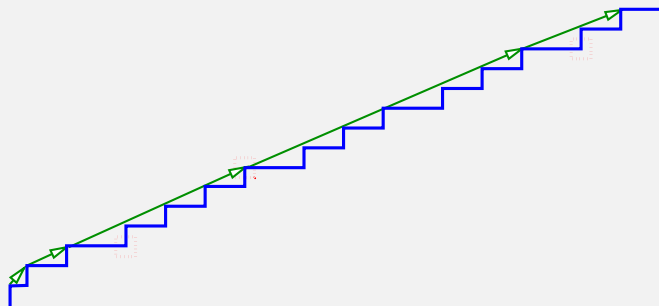


- 2 Cas des segments maximaux "vertex-supported" : $z = [0, u_1, \dots, u_n]$, au maximum, $2n$ arêtes.

⇒ Borne inf. nombre dépend de la profondeur maximale des pentes

Nombre d'arêtes absorbé par un MS

- 1 Cas des segments maximaux "edge-supported" : $z = [0, u_1, \dots, u_n]$, au maximum, $2n+1$ arêtes.
- 2 Cas des segments maximaux "vertex-supported" : $z = [0, u_1, \dots, u_n]$, au maximum, $2n$ arêtes.



⇒ Borne inf. nombre dépend de la profondeur maximale des pentes

- 1 Cas des segments maximaux “edge-supported” : $z = [0, u_1, \dots, u_n]$, au maximum, $2n+1$ arêtes.
- 2 Cas des segments maximaux “vertex-supported” : $z = [0, u_1, \dots, u_n]$, au maximum, $2n$ arêtes.

Theorem (Absorption)

Sur un CD, un MS contient au plus une arête de plus que deux fois la profondeur de sa pente décomposée en fraction continue.

⇒ Borne inf. nombre dépend de la profondeur maximale des pentes

- 1 Cas des segments maximaux “edge-supported” : $z = [0, u_1, \dots, u_n]$, au maximum, $2n+1$ arêtes.
- 2 Cas des segments maximaux “vertex-supported” : $z = [0, u_1, \dots, u_n]$, au maximum, $2n$ arêtes.

Theorem (Absorption)

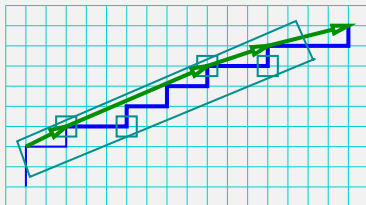
Sur un CD, un MS contient au plus une arête de plus que deux fois la profondeur de sa pente décomposée en fraction continue.

⇒ Borne inf. nombre dépend de la profondeur maximale des pentes

Relations de longueur

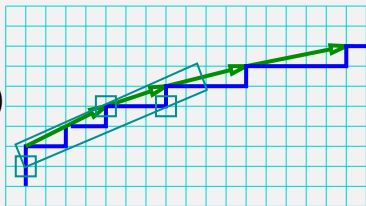
- Cas des segments maximaux “edge-supported” :

$$\mathcal{L}^1(V_k V_{k+1}) \leq \mathcal{L}^1(MS) \leq 3\mathcal{L}^1(V_k V_{k+1})$$



- Cas des segments maximaux “vertex-supported” :

$$\mathcal{L}^1(MS) \leq 4 (\mathcal{L}^1(V_{k-1} V_k) + \mathcal{L}^1(V_k V_{k+1}))$$



- On sépare la somme des longueurs des MS :

$$\sum_{n_{MS}} \mathcal{L}^1(MS_i) = \sum_{n_{ULU}} \mathcal{L}^1(MS_{ULU}) + \sum_{n_{LUL}^{odd}} \mathcal{L}^1(MS_{LUL}^{odd}) + \sum_{n_{LUL}^{even}} \mathcal{L}^1(MS_{LUL}^{even})$$

- Les inégalités précédentes nous donnent :

Theorem (Bornes sup. et. inf. longueurs)

$$Per(\Gamma) \leq \sum_{n_{MS}} \mathcal{L}^1(MS_i) \leq 19 Per(\Gamma)$$

- On sépare la somme des longueurs des MS :

$$\sum_{n_{MS}} \mathcal{L}^1(MS_i) = \sum_{n_{ULU}} \mathcal{L}^1(MS_{ULU}) + \sum_{n_{LUL}^{odd}} \mathcal{L}^1(MS_{LUL}^{odd}) + \sum_{n_{LUL}^{even}} \mathcal{L}^1(MS_{LUL}^{even})$$

- Les inégalités précédentes nous donnent :

Theorem (Bornes sup. et inf. longueurs)

$$Per(\Gamma) \leq \sum_{n_{MS}} \mathcal{L}^1(MS_i) \leq 19 Per(\Gamma)$$

Polygone convexe discret dans une grille $m \times m$

- Un MS contient au plus $2n + 1$ arêtes discrètes, et n vérifie :

$$n \leq \frac{\log(2\sqrt{2}m)}{\log(1 + \sqrt{2})} - 1$$

- Permet d'obtenir une borne inférieure sur le nombre de MS :

Theorem (Bornes sup. et inf. nombre)

MS sur CDP inscrit dans grille $m \times m$

$$\frac{n_e(\Gamma)}{K_1 \log m + K_2} \leq n_{MS}(\Gamma) \leq 3n_e(\Gamma)$$

avec $K_1 = \frac{2}{\log(1+\sqrt{2})}$ et $K_2 = \frac{\log 8(\sqrt{2}-1)}{\log(1+\sqrt{2})}$

Polygone convexe discret dans une grille $m \times m$

- Un MS contient au plus $2n + 1$ arêtes discrètes, et n vérifie :
 - 1 le plus petit MS de complexité n qui absorbe le plus d'arêtes a pour pente la réduite d'ordre n de : $[0, 2, 2, \dots] = \sqrt{2} - 1$
 - 2 un pattern de pente la réduite d'ordre n dans la grille $m \times m$

$$n \leq \frac{\log(2\sqrt{2}m)}{\log(1 + \sqrt{2})} - 1$$

- Permet d'obtenir une borne inférieure sur le nombre de MS :

Theorem (Bornes sup. et inf. nombre)

MS sur CDP inscrit dans grille $m \times m$

$$\frac{n_e(\Gamma)}{K_1 \log m + K_2} \leq n_{MS}(\Gamma) \leq 3n_e(\Gamma)$$

avec $K_1 = \frac{2}{\log(1+\sqrt{2})}$ et $K_2 = \frac{\log 8(\sqrt{2}-1)}{\log(1+\sqrt{2})}$

Polygone convexe discret dans une grille $m \times m$

- Un MS contient au plus $2n + 1$ arêtes discrètes, et n vérifie :
 - ① le plus petit MS de complexité n qui absorbe le plus d'arêtes a pour pente la réduite d'ordre n de : $[0, 2, 2, \dots] = \sqrt{2} - 1$
 - ② un pattern de pente la réduite d'ordre n dans la grille $m \times m$

$$n \leq \frac{\log(2\sqrt{2}m)}{\log(1 + \sqrt{2})} - 1$$

- Permet d'obtenir une borne inférieure sur le nombre de MS :

Theorem (Bornes sup. et inf. nombre)

MS sur CDP inscrit dans grille $m \times m$

$$\frac{n_e(\Gamma)}{K_1 \log m + K_2} \leq n_{MS}(\Gamma) \leq 3n_e(\Gamma)$$

avec $K_1 = \frac{2}{\log(1+\sqrt{2})}$ et $K_2 = \frac{\log 8(\sqrt{2}-1)}{\log(1+\sqrt{2})}$

Polygone convexe discret dans une grille $m \times m$

- Un MS contient au plus $2n + 1$ arêtes discrètes, et n vérifie :

$$n \leq \frac{\log(2\sqrt{2}m)}{\log(1 + \sqrt{2})} - 1$$

- Permet d'obtenir une borne inférieure sur le nombre de MS :

Theorem (Bornes sup. et inf. nombre)

MS sur CDP inscrit dans grille $m \times m$

$$\frac{n_e(\Gamma)}{K_1 \log m + K_2} \leq n_{MS}(\Gamma) \leq 3n_e(\Gamma)$$

avec $K_1 = \frac{2}{\log(1+\sqrt{2})}$ et $K_2 = \frac{\log 8(\sqrt{2}-1)}{\log(1+\sqrt{2})}$

Possibilité d'approcher la longueur moyenne des MS :

Theorem (Bornes sup. inf. longueur moyenne)

Longueur moyenne des MS sur CDP inscrit dans grille $m \times m$

$$\frac{Per(\Gamma)}{3n_e(\Gamma)} \leq \frac{\sum_{n_{MS}(\Gamma)} \mathcal{L}^1(MS_i)}{n_{MS}(\Gamma)} \leq \frac{19Per(\Gamma)(K_1 \log m + K_2)}{n_e(\Gamma)}$$

Possibilité d'approcher la longueur moyenne des MS :

Theorem (Bornes sup. inf. longueur moyenne)

Longueur moyenne des MS sur CDP inscrit dans grille $m \times m$

$$\frac{Per(\Gamma)}{3n_e(\Gamma)} \leq \frac{\sum_{n_{MS}(\Gamma)} \mathcal{L}^1(MS_i)}{n_{MS}(\Gamma)} \leq \frac{19Per(\Gamma)(K_1 \log m + K_2)}{n_e(\Gamma)}$$

Essentiellement du **même ordre** que la longueur moyenne des arêtes du CDP

- 1 Contexte : géométries euclidienne et discrète
- 2 Droites discrètes et variantes
 - Segments de droite discrètes (DSS)
 - Segments maximaux (MS)
 - Polygones convexes discrets (CDP)
- 3 Etude segments maximaux sur polygone convexe discret
- 4 Propriétés asymptotiques des discrétisations de formes 3-convexes
- 5 Conséquences sur convergence d'estimateurs géométriques
- 6 Conclusions et perspectives

Propriétés asymptotiques de discrétisés de formes lisses

- ① Comportement de $n_e(\Gamma)$ donné par :

Theorem (Balog, Bárány91)

Si Γ forme plane convexe ayant une frontière \mathcal{C}^3 et courbure positive alors

- Sa discrétisation de pas $\frac{1}{m}$, Γ_m , est un *polygone convexe discret* et
- le nombre de ses arêtes ou sommets vérifie *asymptotiquement* :

$$c_1(S)m^{\frac{2}{3}} \leq n_e(\Gamma_m) \leq c_2(S)m^{\frac{2}{3}}$$

où les constantes $c_1(S)$ et $c_2(S)$ dépendent des valeurs extrémales de la courbure le long de S .

- ② D'où le comportement asymptotique :

Théorème

Si $m = \frac{1}{h}$ et $\Gamma(m)$ les discrétisations de plus en plus fines d'une forme 3-convexe Γ , alors longueur *discrète* moyenne des segments maximaux vérifie asymptotiquement

$$\Theta(m^{\frac{1}{3}}) \leq \overline{\mathcal{L}^1(MS)(\Gamma_m)} \leq \Theta(m^{\frac{1}{3}} \log(m))$$

Propriétés asymptotiques de discrétisés de formes lisses

- ① Comportement de $n_e(\Gamma)$ donné par :

Theorem (Balog, Bárány91)

Si Γ forme plane convexe ayant une frontière \mathcal{C}^3 et courbure positive alors

- Sa discrétisation de pas $\frac{1}{m}$, Γ_m , est un **polygone convexe discret** et
- le nombre de ses arêtes ou sommets vérifie **asymptotiquement** :

$$c_1(S)m^{\frac{2}{3}} \leq n_e(\Gamma_m) \leq c_2(S)m^{\frac{2}{3}}$$

où les constantes $c_1(S)$ et $c_2(S)$ dépendent des valeurs extrémales de la courbure le long de S .

- ② D'où le comportement asymptotique :

Théorème

Si $m = \frac{1}{h}$ et $\Gamma(m)$ les discrétisations de plus en plus fines d'une forme 3-convexe Γ , alors longueur **discrète** moyenne des segments maximaux vérifie asymptotiquement

$$\Theta(m^{\frac{1}{3}}) \leq \overline{\mathcal{L}^1(MS)(\Gamma_m)} \leq \Theta(m^{\frac{1}{3}} \log(m))$$

Propriétés asymptotiques de discrétisés de formes lisses

- ① Comportement de $n_e(\Gamma)$ donné par :

Theorem (Balog, Bárány91)

Si Γ forme plane convexe ayant une frontière \mathcal{C}^3 et courbure positive alors

- Sa discrétisation de pas $\frac{1}{m}$, Γ_m , est un **polygone convexe discret** et
- le nombre de ses arêtes ou sommets vérifie **asymptotiquement** :

$$c_1(S)m^{\frac{2}{3}} \leq n_e(\Gamma_m) \leq c_2(S)m^{\frac{2}{3}}$$

où les constantes $c_1(S)$ et $c_2(S)$ dépendent des valeurs extrémales de la courbure le long de S .

- ② D'où le comportement asymptotique :

Théorème

Si $m = \frac{1}{h}$ et $\Gamma(m)$ les discrétisations de plus en plus fines d'une forme 3-convexe Γ , alors longueur **discrète** moyenne des segments maximaux vérifie asymptotiquement

$$\Theta(m^{\frac{1}{3}}) \leq \overline{\mathcal{L}^1(MS)(\Gamma_m)} \leq \Theta(m^{\frac{1}{3}} \log(m))$$

Propriétés asymptotiques de discrétisés de formes lisses

- ① Comportement de $n_e(\Gamma)$ donné par :

Theorem (Balog, Bárány91)

Si Γ forme plane convexe ayant une frontière \mathcal{C}^3 et courbure positive alors

- Sa discrétisation de pas $\frac{1}{m}$, Γ_m , est un **polygone convexe discret** et
- le nombre de ses arêtes ou sommets vérifie **asymptotiquement** :

$$c_1(S)m^{\frac{2}{3}} \leq n_e(\Gamma_m) \leq c_2(S)m^{\frac{2}{3}}$$

où les constantes $c_1(S)$ et $c_2(S)$ dépendent des valeurs extrémales de la courbure le long de S .

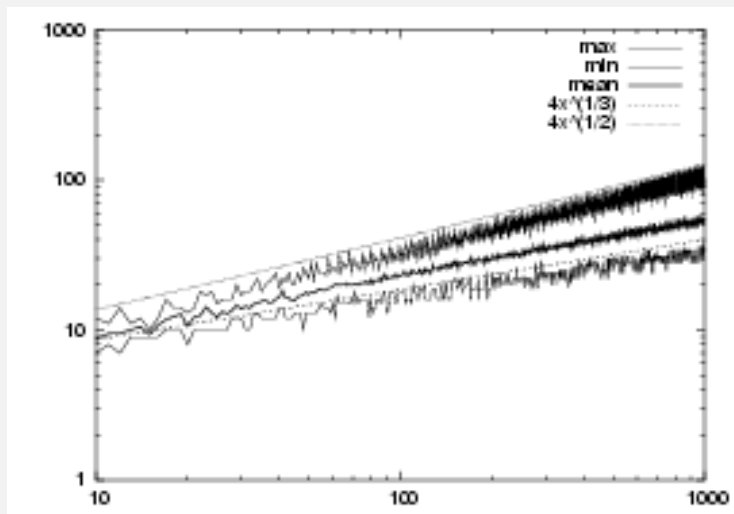
- ② D'où le comportement asymptotique :

Théorème

Si $m = \frac{1}{h}$ et $\Gamma(m)$ les discrétisations de plus en plus fines d'une forme 3-convexe Γ , alors longueur **discrète** moyenne des segments maximaux vérifie asymptotiquement

$$\Theta(m^{\frac{1}{3}}) \leq \overline{\mathcal{L}^1(MS)(\Gamma_m)} \leq \Theta(m^{\frac{1}{3}} \log(m))$$

Vérification expérimentale



Longueurs discrète sur discrétisations de plus en plus fines d'un cercle

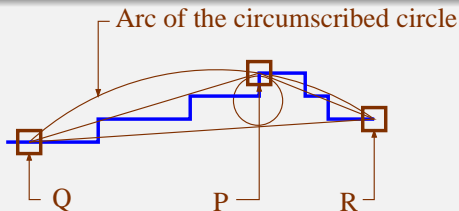
- 1 Contexte : géométries euclidienne et discrète
- 2 Droites discrètes et variantes
 - Segments de droite discrètes (DSS)
 - Segments maximaux (MS)
 - Polygones convexes discrets (CDP)
- 3 Etude segments maximaux sur polygone convexe discret
- 4 Propriétés asymptotiques des discrétisations de formes 3-convexes
- 5 Conséquences sur convergence d'estimateurs géométriques
- 6 Conclusions et perspectives

Convergence d'estimateur discret, étude d'un cas

1 Estimateur de courbure discret [Cœurjolly02]

Definition

Soit P un point du contour discret Γ plongé dans une grille de pas $\frac{1}{m}$, soient $Q = B(P)$ and $R = F(P)$ les extrémités des DSS les plus longs partant de P (appelés *demi-tangentes*). Alors l'*estimateur de courbure par cercle circonscris* $\hat{\kappa}(P)$ est l'inverse du rayon du cercle circonscris à P , Q et R considéré à la résolution m .



2 La preuve de sa convergence est soumise à l'hypothèse suivante :

Hypothèse : La longueur des demi-tangentes grandit en $\Theta\left(m^{\frac{1}{2}}\right)$

1 Estimateur de courbure discret [Cœurjolly02]

Definition

Soit P un point du contour discret Γ plongé dans une grille de pas $\frac{1}{m}$, soient $Q = B(P)$ and $R = F(P)$ les extrémités des DSS les plus longs partant de P (appelés *demi-tangentes*). Alors l'*estimateur de courbure par cercle circonscrit* $\hat{\kappa}(P)$ est l'inverse du rayon du cercle circonscrit à P , Q et R considéré à la résolution m .

- 2 La preuve de sa convergence est soumise à l'hypothèse suivante :
Hypothèse : La longueur des demi-tangentes grandit en $\Theta(m^{\frac{1}{2}})$
- 3 Les demi-tangentes sont incluses dans des segments maximaux, notre étude permet de **réfuter cette hypothèse**.

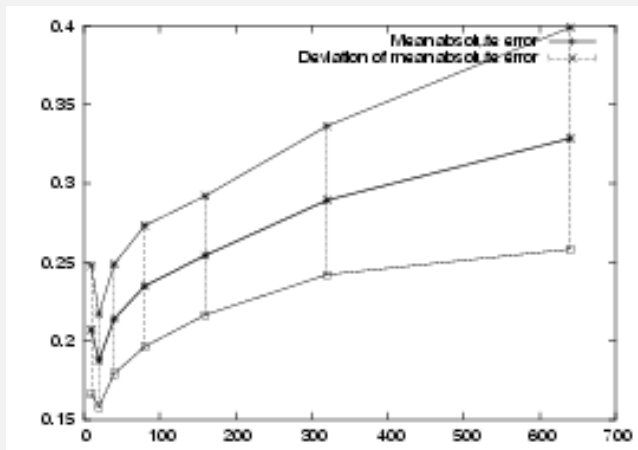
1 Estimateur de courbure discret [Cœurjolly02]

Definition

Soit P un point du contour discret Γ plongé dans une grille de pas $\frac{1}{m}$, soient $Q = B(P)$ and $R = F(P)$ les extrémités des DSS les plus longs partant de P (appelés *demi-tangentes*). Alors l'*estimateur de courbure par cercle circonscris* $\hat{\kappa}(P)$ est l'inverse du rayon du cercle circonscris à P , Q et R considéré à la résolution m .

- 2 La preuve de sa convergence est soumise à l'hypothèse suivante :
Hypothèse : La longueur des demi-tangentes grandit en $\Theta(m^{\frac{1}{2}})$
- 3 Les demi-tangentes sont incluses dans des segments maximaux, notre étude permet de **réfuter cette hypothèse**.

Vérification expérimentale - courbure par cercle circonscris



Moyenne et déviation standard de l'erreur absolue d'estimation de courbure sur des cercles de rayon croissant.

- 1 Contexte : géométries euclidienne et discrète
- 2 Droites discrètes et variantes
 - Segments de droite discrètes (DSS)
 - Segments maximaux (MS)
 - Polygones convexes discrets (CDP)
- 3 Etude segments maximaux sur polygone convexe discret
- 4 Propriétés asymptotiques des discrétisations de formes 3-convexes
- 5 Conséquences sur convergence d'estimateurs géométriques
- 6 Conclusions et perspectives

- 1 Etude précise des segments maximaux sur les polygones convexes discrets
- 2 Propriétés à échelle donnée et asymptotiques en nombre et longueurs des segments maximaux
- 3 Les MS grandissent principalement en $\Theta(m^{1/3})$.
- 4 Construire un estimateur de courbure discret local basé DSS qui converge asymptotiquement reste un problème ouvert.
- 5 La croissance en moyenne des segments maximaux permet d'affirmer que leur direction converge en moyenne vers celle de la tangente réelle lorsque la discrétisation se raffine.
- 6 Donne aussi la vitesse de convergence ($m^{1/3}$ mais expérimentalement $m^{2/3}$ sur disque)

- 1 Etude précise des segments maximaux sur les polygones convexes discrets
- 2 Propriétés à échelle donnée et asymptotiques en nombre et longueurs des segments maximaux
- 3 Les MS grandissent principalement en $\Theta(m^{1/3})$.
- 4 Construire un estimateur de courbure discret local basé DSS qui converge asymptotiquement reste un problème ouvert.
- 5 La croissance en moyenne des segments maximaux permet d'affirmer que leur direction converge en moyenne vers celle de la tangente réelle lorsque la discrétisation se raffine.
- 6 Donne aussi la vitesse de convergence ($m^{1/3}$ mais expérimentalement $m^{2/3}$ sur disque)

- 1 Etude précise des segments maximaux sur les polygones convexes discrets
- 2 Propriétés à échelle donnée et asymptotiques en nombre et longueurs des segments maximaux
- 3 Les MS grandissent principalement en $\Theta(m^{1/3})$.
- 4 Construire un estimateur de courbure discret local basé DSS qui converge asymptotiquement reste un problème ouvert.
- 5 La croissance en moyenne des segments maximaux permet d'affirmer que leur direction converge en moyenne vers celle de la tangente réelle lorsque la discrétisation se raffine.
- 6 Donne aussi la vitesse de convergence ($m^{1/3}$ mais expérimentalement $m^{2/3}$ sur disque)

- 1 Etude précise des segments maximaux sur les polygones convexes discrets
- 2 Propriétés à échelle donnée et asymptotiques en nombre et longueurs des segments maximaux
- 3 Les MS grandissent principalement en $\Theta(m^{1/3})$.
- 4 Construire un estimateur de courbure discret local basé DSS qui converge asymptotiquement reste un problème ouvert.
- 5 La croissance en moyenne des segments maximaux permet d'affirmer que leur direction converge en moyenne vers celle de la tangente réelle lorsque la discrétisation se raffine.
- 6 Donne aussi la vitesse de convergence ($m^{1/3}$ mais expérimentalement $m^{2/3}$ sur disque)

- 1 Etude précise des segments maximaux sur les polygones convexes discrets
- 2 Propriétés à échelle donnée et asymptotiques en nombre et longueurs des segments maximaux
- 3 Les MS grandissent principalement en $\Theta(m^{1/3})$.
- 4 Construire un estimateur de courbure discret local basé DSS qui converge asymptotiquement reste un problème ouvert.
- 5 La croissance en moyenne des segments maximaux permet d'affirmer que leur direction converge en moyenne vers celle de la tangente réelle lorsque la discrétisation se raffine.
- 6 Donne aussi la vitesse de convergence ($m^{1/3}$ mais expérimentalement $m^{2/3}$ sur disque)

- 1 Etude précise des segments maximaux sur les polygones convexes discrets
- 2 Propriétés à échelle donnée et asymptotiques en nombre et longueurs des segments maximaux
- 3 Les MS grandissent principalement en $\Theta(m^{1/3})$.
- 4 Construire un estimateur de courbure discret local basé DSS qui converge asymptotiquement reste un problème ouvert.
- 5 La croissance en moyenne des segments maximaux permet d'affirmer que leur direction converge en moyenne vers celle de la tangente réelle lorsque la discrétisation se raffine.
- 6 Donne aussi la vitesse de convergence ($m^{1/3}$ mais expérimentalement $m^{2/3}$ sur disque)